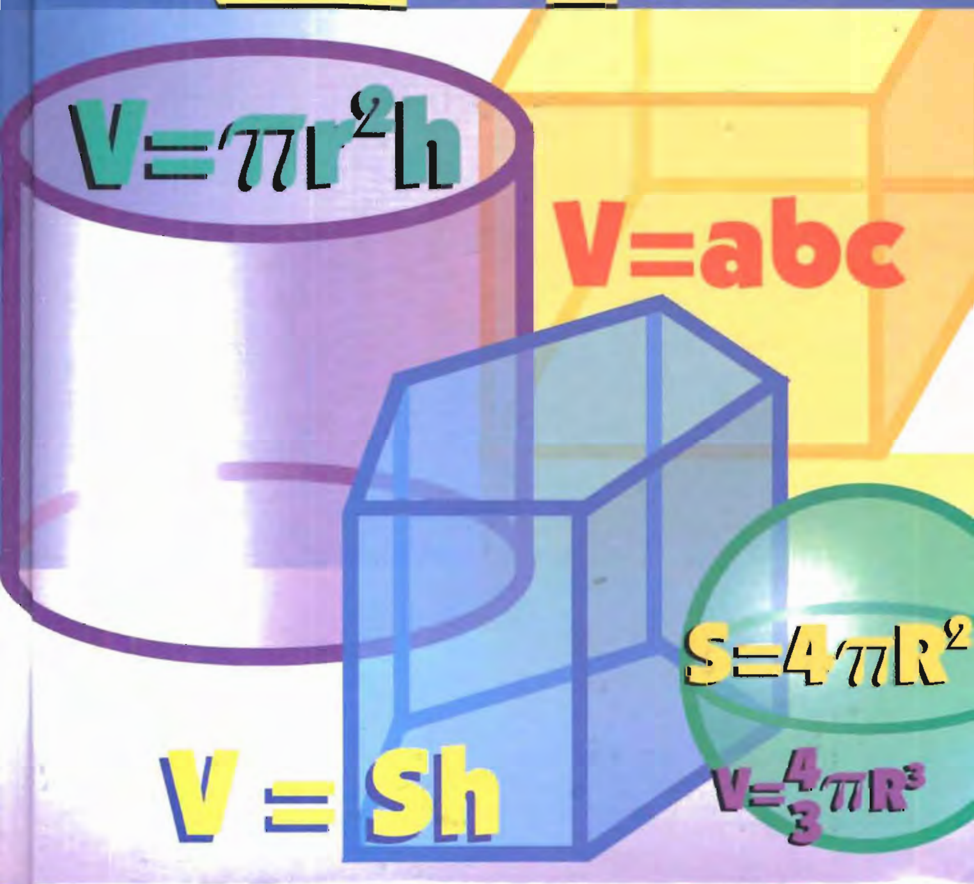
АБИТУРИЕНТ

ГЕОМЕТРИЯ за 24 часа



Серия «Абитуриент»

Л. Ж. Жалпанова
О. А. Калинина
Г. Н. Мальянц

ГЕОМЕТРИЯ ЗА 24 ЧАСА

Ростов-на-Дону

Феникс

2009

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
КТК 444
Ж25

Книга подготовлена при участии ООО «Златоуст»

Жалпанова Л. Ж.
Ж25 Геометрия за 24 часа / Л. Ж. Жалпанова, О. А. Калинина, Г. Н. Мальянц. — Ростов н/Д : Феникс, 2009. — 303, [1] с. — (Абитуриент).

ISBN 978-5-222-15334-5

Учебно-справочное пособие по основам геометрии. Все сведения изложены в краткой и информативной форме и удачно скомпонованы.

Справочник предназначен школьникам старших классов и студентам вузов, он окажется весьма полезным и необходимым при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам.

ISBN 978-5-222-15334-5

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

Оглавление

РАЗДЕЛ I
ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрия рассматривает свойства геометрических фигур, расположенных в плоскости. Это такие фигуры, как отрезок, треугольник, многоугольник, окружность и др. В процессе изложения материала будут приводиться аксиомы, а также теоремы и их доказательства.

Аксиомой называется бесспорное утверждение, не требующее и не имеющее доказательств.

Теоремой называется утверждение, правильность которого устанавливается путем логических рассуждений. Эти рассуждения называются *доказательством теоремы*.

Глава 1
ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ, ОТРЕЗКИ

Точка и прямая

Точка и прямая являются основными геометрическими фигурами планиметрии.

Точки на чертежах обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, D и т. д. (рис. 1).

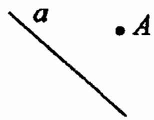


Рис. 1

Прямые представляют собой прямые линии, не имеющие начала или конца. На чертежах с помощью линейки изображается часть прямой. Прямые, как правило, обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d и т. д.

Свойства прямых и точек

1. Точки могут лежать на прямой или не лежать на ней. На рисунке 2 точка A не лежит на прямой a, а точки B, C и D находятся на прямой.

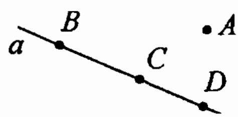


Рис. 2

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну (рис. 3).

Рис. 3

Это значит, что через точки A и B нельзя провести две не совпадающие друг с другом прямые.

Если на прямой лежат точки, ее можно обозначить этими точками (например, прямая AB).

Прямые могут пересекаться в какой-нибудь точке (рис. 4).

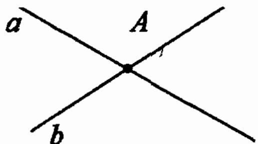


Рис. 4

Отсюда можно вывести и обратное утверждение: если прямые имеют общую точку, значит, они пересекаются. При этом пересекающиеся прямые не могут иметь более 1 точки пересечения. Если бы прямые имели хотя бы 2 общие точки, то получилось бы, что через эти точки проходят 2 разные прямые. А это невозможно, потому что, как было сказано выше, через 2 точки можно провести только одну прямую. Таким образом, можно сделать следующий вывод:

1) две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке;

2) если на прямой лежат 3 точки, только одна из них лежит между двумя другими.

3. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 5).

Рис. 5

Полупрямая (луч), ее свойства

Если на прямой a поставить точку A, она разделит прямую на две полупрямых. Их также называют *лучами*. Точка A является начальной точкой луча. Лучи обозначают строчными латинскими буквами (например, m, n) или прописными латинскими буквами, первая из которых — начальная точка луча, а вторая — любая другая точка, принадлежащая этой полупрямой (рис. 6).

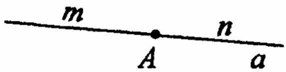


Рис. 6

Полупрямые, лежащие на одной прямой, называются *дополнительными*. Точки, принадлежащие дополнительным полупрямым, лежат по разные стороны от начальной точки. Точки одной полупрямой лежат по одну сторону от начальной точки.

Отрезок

Отрезком называется часть прямой, расположенная между двумя точками, лежащими на этой прямой. Данные точки называются *концами отрезка*. Отрезок обозначается по названиям точек. Например, отрезок AB (рис. 7).

Рис. 7

Если между точками A и B на прямой лежит точка C, считается, что она принадлежит отрезку AB (рис. 8).

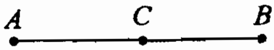


Рис. 8

Отрезку AB принадлежат точки A и B, а также все точки прямой, расположенные между ними.

Свойства отрезков

1. Если прямая a делит плоскость на две полуплоскости, при этом концы отрезка лежат в одной из полуплоскостей, это значит, что отрезок не пересекается с прямой. На рисунке 9 это отрезок AB.

2. Если концы отрезка находятся в разных полуплоскостях, это значит, что отрезок пересекается с прямой. На рисунке 9 это отрезок XY.

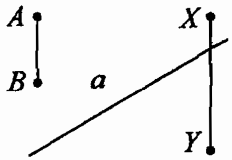


Рис. 9

Расстояние между концами отрезка называется его *длиной.*

3. У каждого отрезка есть длина, большая нуля. Любая точка отрезка делит его на части.

4. Длина отрезка равна также сумме длин всех частей, на которые он разбит любой точкой, принадлежащей отрезку. *Серединой отрезка* называется точка, делящая отрезок на 2 равных отрезка.

5. На луче от его начальной точки можно отложить только один отрезок заданной длины. Для того чтобы определить, равны отрезки или нет, их надо наложить друг на друга. Если отрезки полностью совместятся, значит, они равны.

Глава 2
УГЛЫ

Углом называется фигура, образованная двумя полупрямыми, исходящими из одной общей точки. Эта точка называется ***вершиной угла***. Полупрямые, образующие угол, называются ***сторонами угла*** (рис. 10).

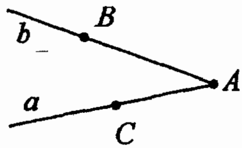


Рис. 10

Угол, образованный дополнительными полупрямыми, называется ***развернутым*** (рис. 11).

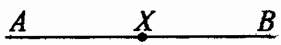


Рис. 11

Слово «угол» обозначают «∠». Его можно назвать соответственно вершине Р*A* или по вершине и двум точкам, принадлежащим каждой полупрямой Р*BAC*, а также по названию полупрямых: Р*ab*.

Любой угол имеет внутреннюю часть и внешнюю.

Из вершины угла может выходить луч, отличный от его сторон. Если он при этом пересекает отрезок, соединяющий стороны угла, то считается, что луч проходит внутри

угла между его сторонами. В развернутом угле все лучи, отличные от его сторон, проходят между сторонами угла.

Измерение углов

Луч, проходящий между сторонами угла, делит угол на 2 угла.

Углы измеряют в градусах. Развернутый угол равен 180°. Верно и обратное: 1° равен 1/180 части развернутого угла.

Градусная мера угла показывает, сколько раз угол, равный 1°, может уложиться в данном угле. У каждого угла есть своя градусная мера.

Если угол разделен лучами на несколько углов, то его градусная мера равна сумме градусных мер всех углов, на которые он разбит.

1° делится на 60 минут, которые обозначаются знаком «′». 1 минута делится на 60 секунд, которые обозначаются знаком «″». Например, градусная мера угла равна 30°40′20″.

От любого луча можно отложить в заданную полуплоскость только один угол с определенной градусной мерой, которая меньше 180°.

Угол, чья градусная мера равна 90°, называется *прямым* (рис. 12*а*).

Угол, чья градусная мера меньше 90°, называется *острым* (рис. 12*б*).

Угол, чья градусная мера больше 90°, называется *тупым* (рис. 12*в*).

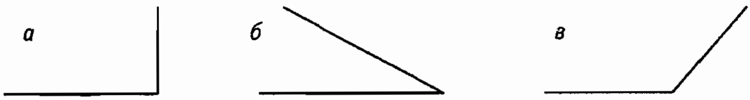


Рис. 12

Сравнение углов

Для сравнения двух углов надо наложить их друг на друга таким образом, чтобы сторона одного угла совпала со стороной другого угла. Вторые стороны углов нужно разместить по одну сторону от совмещенных сторон. Если вторые стороны углов тоже совместятся, значит, углы равны. Если нет, то угол, который будет составлять часть другого угла, является меньшим, а другой угол — соответственно большим.

Так, любой неразвернутый угол является частью развернутого, а значит, меньшим по размеру. Справедливо будет также и то, что все развернутые углы равны.

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла, проходящий между его сторонами и делящий угол на 2 равные части (рис. 13).

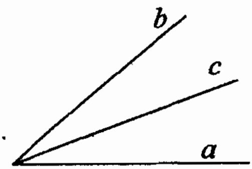


Рис. 13

Смежные углы

Смежными называются углы, которые имеют одну общую сторону, а две другие являются дополнительными полупрямыми (рис. 14).

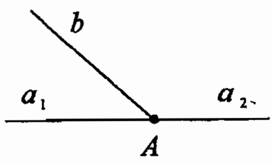


Рис. 14

Теорема: сумма смежных углов равна 180°.

Дано:

$\angle a_1b$ и $\angle a_2b$ — смежные углы.

Доказать:

$\angle a_1b + \angle a_2b = 180^\circ$.

Доказательство:

$\angle a_1a_2$ — развернутый. Полупрямая b проходит между сторонами a_1 и a_2 развернутого угла, разбивая его на 2 угла. Их сумма равна развернутому углу, т. е. 180°.

Теорема доказана.

Справедливо также утверждение: у двух равных углов смежные с ними углы тоже равны.

Вертикальные углы

Вертикальными называются углы, если обе стороны одного угла являются продолжением сторон другого угла (рис. 15).

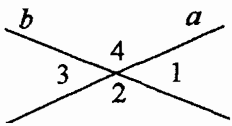


Рис. 15

Теорема: вертикальные углы равны.

Дано:

$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные.

Доказать:

$\angle 1 = \angle 3$.

Доказательство:

$\angle 4$ смежен с $\angle 3$ и с $\angle 1$. Согласно теореме о смежных углах $\angle 3$ и $\angle 1$ дополняют $\angle 4$ до 180°, а значит, по градусной мере эти углы равны, т. е. $\angle 1 = \angle 3$.

Теорема доказана.

Углы, отложенные в одну полуплоскость

Теорема: если от данной полупрямой отложить в одну полуплоскость два угла, то сторона меньшего угла, отличная от данной полупрямой, проходит между сторонами большего угла (рис. 16).

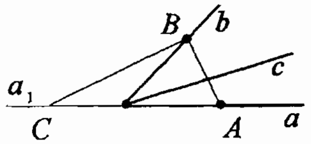


Рис. 16

Дано:

$\angle ab$ и $\angle ac$ — отложены в одну полуплоскость;

$\angle ac < \angle ab$.

Доказать:

луч c проходит между сторонами $\angle ab$.

Доказательство:

Пусть a_1 — полупрямая, дополнительная к лучу a. Поставим на луче a точку A, на луче a_1 точку C, на луче b точку B, и соединим их. Получим треугольник ABC.

Прямая, частью которой является луч c, пересекает сторону AC треугольника ABC. Следовательно, она пересекает еще одну сторону треугольника BA или BC. Это пересечение проводится лучом c, т. к. он находится в другой полуплоскости.

Если луч c пересекает сторону BA, то он должен проходить между сторонами $\angle ab$, а если сторону BC, то луч проходит между сторонами $\angle a_1b$.

$\angle ac < \angle ab$, поэтому согласно свойству смежных углов $\angle a_1b < \angle a_1c$. Отсюда видно, что луч c не может проходить между сторонами $\angle a_1b$. Можно сделать вывод, что луч c проходит между сторонами $\angle ab$.

Теорема доказана.

Глава 3
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Перпендикулярными называются прямые, которые при пересечении образуют прямые углы (рис. 17).

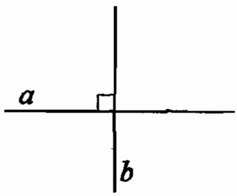


Рис. 17

Если при пересечении двух прямых образуется хоть один прямой угол, остальные три угла тоже будут прямыми.

Для обозначения перпендикулярности прямых используют знак «⊥». Например, $AB \perp CD$ или $a \perp b$.

Теорема: через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.

Дано:

прямая a;

т. A на прямой a.

Доказать:

существует прямая $b \perp a$ и b — единственная.

Доказательство:

Точка A находится на прямой a и является начальной точкой луча a_1. Построим от этой точки луч b_1, образующий с лучом a_1 угол, равный 90°. Прямая b, частью которой является луч b_1, окажется перпендикулярной прямой a.

Если допустить, что существует еще прямая c, перпендикулярная прямой a и проходящая через т. A, то луч c_1, лежащий на этой прямой и находящийся в одной полуплоскости с лучом b_1, будет образовывать с прямой a перпендикуляр. В результате получится 2 угла, отложенных в одной полуплоскости, от одного луча под углом 90°. Но это невозможно. В одну полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°. Следовательно, через точку A на прямой a можно провести только одну прямую, перпендикулярную ей.

Теорема доказана.

Перпендикуляром к прямой называется отрезок, лежащий на прямой, перпендикулярной данной, а их точка пересечения совпадает с концом отрезка (рис. 18).

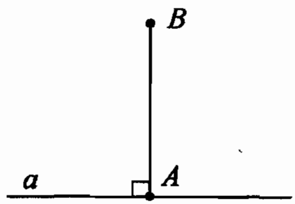


Рис. 18

Конец отрезка, лежащий на перпендикулярной прямой, называется *основанием перпендикуляра*.

Теорема: из точки, не принадлежащей прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Дано:
прямая a (рис. 19*а*);
т. B — не лежащая на прямой a;
т. A — принадлежит прямой a.
Доказать:
только $AB \perp a$.
Доказательство:

Докажем, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой a. Для этого поставим точку C на прямой a. Отложим от точки C угол 1 и 2 (рис. 19*б*).

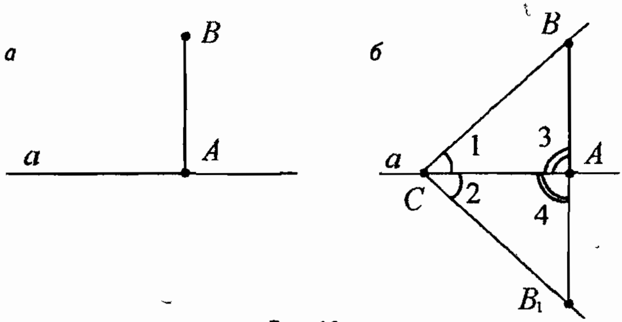


Рис. 19

Причем $\angle 1$ должен быть равен $\angle 2$. Отметим на сторонах большого угла точки B и B_1, так что $CB = CB_1$. Соединим B и B_1 с точкой А. Наложим угол B_1CA на $\angle BCA$: CB_1 совпадет с CB, а B_1A совпадет с BA. Получим, что $\angle 3$ равен $\angle 4$, но поскольку $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Значит $\angle 3 = \angle 4 = 90°$, т. е. AB — искомый перпендикуляр.

Докажем единственность AB: пусть существует два перпендикуляра AB и AB_1 к прямой a, т. е. через точку A, лежащую на данной прямой проходит две прямые перпендикулярные прямой a, что невозможно по доказанной ранее теореме.

Значит перпендикуляры AB и AB_1 совпадут, т. е. перпендикуляр AB — единственный. Теорема доказана.

Глава 4
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Параллельными называются прямые, которые нигде не пересекаются (рис. 20).

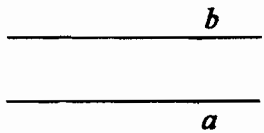


Рис. 20

Параллельные прямые обозначаются знаком «$\parallel$». Например, $a \parallel b$ или $AB \parallel CD$. Это значит, что прямая a параллельна прямой b, прямая AB параллельна прямой CD.

Два отрезка называются *параллельными друг другу*, если они принадлежат двум параллельным прямым. То же можно сказать и о параллельности отрезка и прямой, двух лучей, луча и прямой, отрезка и луча.

Основное свойство параллельных прямых

Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную заданной.

Первый признак параллельности прямых

Теорема: две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.

Дано:

$a \parallel c$;

$b \parallel c$.

Доказать:

$a \parallel b$.

Доказательство:

Допустим, что прямая a не параллельна прямой b (рис. 21).

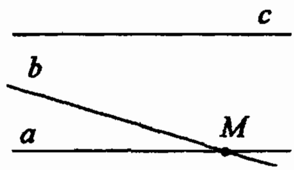


Рис. 21

Следовательно, они должны пересечься в некоторой точке M. Получается, что через эту точку проходят две прямые, параллельные прямой c, что невозможно по определению основного свойства параллельных прямых.

Теорема доказана.

Секущая

Прямая, пересекающая две другие прямые, называется *секущей* (рис. 22).

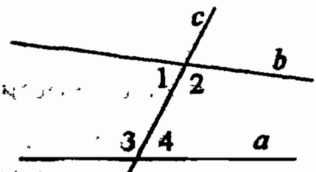


Рис. 22

В данном случае это прямая *c*, которая пересекает прямые *a* и *b*. Это обозначается так: $a \cap c$ и $c \cap b$. При этом образуются углы, имеющие специальные названия.

$\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ называются *внутренними односторонними*.

$\angle 1$ и $\angle 4$, 2 и $\angle 3$ называются *внутренними накрест лежащими*.

Теорема: если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Дано:

$a \parallel b$ (рис. 23);

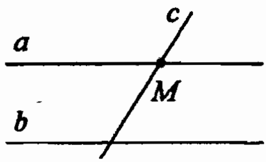


Рис. 23

$c \cap a$ в т. *M*.

Доказать:

$c \cap b$.

Доказательство:

Пусть *c* не пересекает *b*, следовательно, $c \parallel b$. Это значит, что через т. *M* проходят прямые *a* и *c*, и обе они параллельны *b*. Но это невозможно, поскольку через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Значит, $c \cap b$.

Теорема доказана.

Второй признак параллельности прямых

Теорема: если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Дано:
прямые a и b;
секущая c;
$\angle 1 = \angle 2$.
Доказать:
$a \parallel b$.
Доказательство:

Если $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, прямые a и b перпендикулярны секущей c, а значит, они параллельны друг другу.

Пусть $\angle 1 = \angle 2 \neq 90°$. Разделим отрезок AB на 2 равные части с т. C посередине. Через эту точку проведем перпендикуляр CM к прямой a. На прямой b отложим отрезок BN, равный AM, после чего соединим отрезком точки C и B (рис. 24).

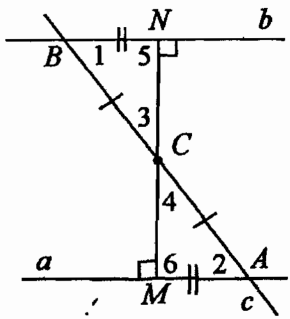


Рис. 24

Образованные треугольники AMC и BNC равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует, что $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, а значит, точки M, C, N лежат на одной прямой, а $\angle 5 = \angle 6 = 90°$. Таким образом, прямые a и b параллельны друг другу.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если две прямые параллельны, то при пересечении их секущей внутренние накрест лежащие углы будут равны.

Дано:

$a \parallel b$;

AB — секущая (рис. 25).

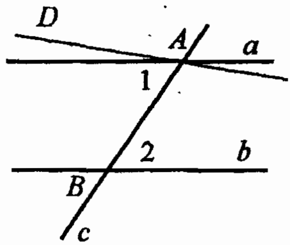


Рис. 25

Доказать:

$\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство:

Пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от прямой c $\angle BAD = \angle 2$, при этом $\angle BAD$ и $\angle 2$ — накрест лежащие при пересечении прямых b и AD секущей AB. Поскольку $\angle BAD = \angle 2$, следовательно, $AD \parallel b$. Получили две параллельные прямые, проходящие через точку A, а это невозможно. Значит, предположение, что $\angle 1 \neq \angle 2$, неверно. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема доказана.

Третий признак параллельности прямых

Углы 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8 (рис. 26), образующиеся при пересечении двух прямых секущей, называются *соответственными углами*.

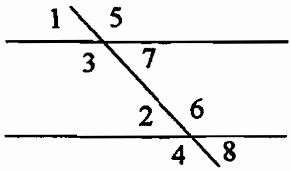


Рис. 26

Теорема: если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Дано:

прямые a и b (рис. 27);

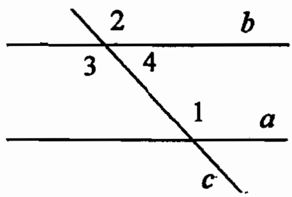


Рис. 27

секущая c;

$\angle 1 = \angle 2$ — соответственные.

Доказать:

$a \parallel b$.

Доказательство:

При пересечении прямых a и b образуются вертикальные углы $\angle 3 = \angle 2$. Поскольку $\angle 2 = \angle 1$ (по условию), то $\angle 3 = \angle 1$. Углы 1 и 3 являются накрест лежащими, а значит, прямые a и b параллельны.

Обратная теорема: если две прямые параллельны, то при пересечении их секущей соответственные углы будут равны.

Дано:

$a \parallel b$;

c — секущая;

$\angle 2$ и $\angle 1$ — соответственные (рис. 28).

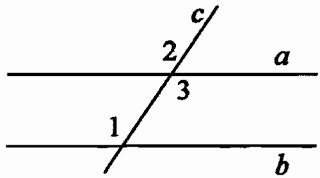


Рис. 28

Доказать:

$\angle 2 = \angle 1$.

Доказательство:

Поскольку $a \parallel b$ (по условию), то 1 и 3 — накрест лежащие. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. $\angle 2$ и $\angle 3$ — вертикальные, значит, $\angle 2 = \angle 3$.

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема доказана.

Четвертый признак параллельности прямых

Теорема: если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Дано:

прямые a и b (рис. 29);

прямая c — секущая;

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$.

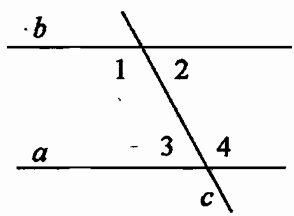


Рис. 29

Доказать:

$a \parallel b$.

Доказательство:

Поскольку $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Поскольку $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 1$ и $\angle 4$ — накрест лежащие и равны. Значит, $a \parallel b$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если две прямые параллельны, то при пересечении их секущей сумма внутренних односторонних углов будет равна 180°.

Дано:

$a \parallel b$;

прямая c — секущая (рис. 30).

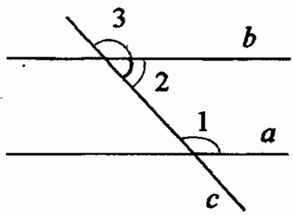


Рис. 30

Доказать:

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Доказательство:

$a \parallel b$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ (как соответственные). $\angle 3$ и $\angle 2$ — смежные, а значит, $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Поскольку $\angle 1 = \angle 3$, в $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Теорема доказана.

Если две прямые перпендикулярны третьей, они никогда не пересекутся, т. е. прямые параллельны.

Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

Глава 5
ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольником называется фигура, образованная соединением отрезками трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 31).

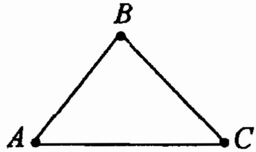


Рис. 31

Три точки A, B, C, в которых соединяются отрезки, называются *вершинами* треугольника. Отрезки AB, BC, CA называются *сторонами* треугольника. Вместо слова «треугольник» употребляется значок Δ. Например, ΔABC.

$\angle CAB$, $\angle ABC$ и $\angle BCA$ называются *углами* треугольника. Они обозначаются $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 32).

Рис. 32

Внутренним углом при данной вершине называется угол, являющийся частью треугольника.

В любом треугольнике два угла острые, а третий может быть острым, тупым или прямоугольным.

Остроугольным называется треугольник, у которого все три угла острые (рис. 33*а*).

Тупоугольным называется треугольник, у которого один угол тупой (рис. 33*б*).

Прямоугольным называется треугольник, у которого один угол прямоугольный (рис. 33*в*).

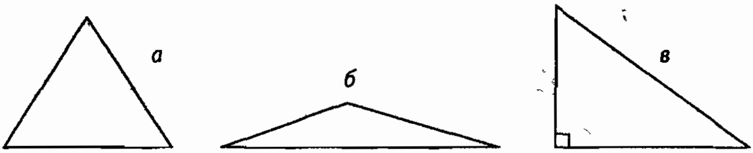


Рис. 33

Периметром (Р) треугольника называется сумма длин его сторон:

$$P = AB + BC + CA.$$

Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним*:

$$AB = BC = CA.$$

Медиана, биссектриса и высота треугольника

Медианой треугольника называют отрезок, проведенный от вершины треугольника к точке, лежащей в середине противоположной стороны (рис. 34*а*).

Биссектрисой треугольника называют отрезок, проведенный от вершины треугольника к точке, лежащей на противоположной стороне, при этом отрезок делит угол пополам (рис. 34*б*).

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный от вершины треугольника к прямой, на которой лежит противоположная сторона (рис. 34*в*).

Серединным перпендикуляром треугольника называется прямая, проходящая через середину стороны треугольника и перпендикулярная к ней (рис. 34*г*).

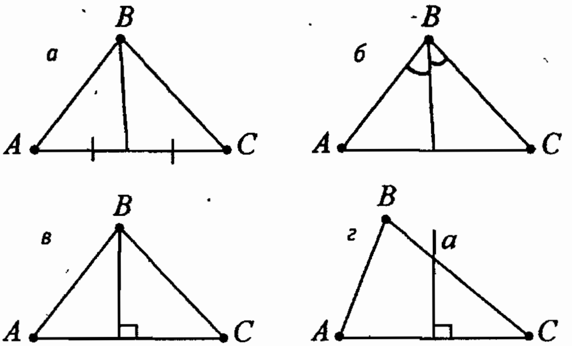


Рис. 34

Свойства медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Основное свойство медианы треугольника: в любом треугольнике все его медианы пересекаются в одной точке.

Основное свойство биссектрисы треугольника: в любом треугольнике все его биссектрисы пересекаются в одной точке.

Основное свойство высоты треугольника: в любом треугольнике все его высоты или их продолжения пересекаются в одной точке.

Основное свойство серединного перпендикуляра треугольника: серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Сумма углов треугольника

Теорема: сумма углов треугольника равна 180°.

Дано:

ΔABC.

Доказать:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство:

Проведем через вершину B прямую c, при этом $c \parallel AC$ (рис. 35).

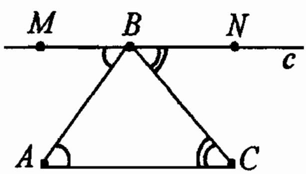


Рис. 35

$\angle A = \angle MBA$, поскольку они накрест лежащие при пересечении параллельных прямых c и AC секущей AB.

$\angle C = \angle CBN$, поскольку они являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых c и AC секущей BC.

$\angle MBA + \angle B + \angle CBN = 180°$ (по построению). Поскольку $\angle MBA = \angle A$, а $\angle CBN = \angle C$, следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема доказана.

Теорема: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Дано:

ΔABC (рис. 36).

Доказать:

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

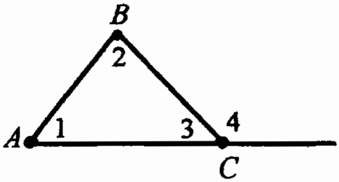


Рис. 36

Доказательство:

Согласно теореме о сумме углов треугольника, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. Из этого равенства следует, что:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle 3\ (1).$$

Поскольку $\angle 4$ — смежный с $\angle 3$, их сумма равна: $\angle 4 + \angle 3 = 180°$. Отсюда можно вывести, что:

$$\angle 4 = 180° - \angle 3\ (2).$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.

Теорема доказана.

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Дано:

ΔABC;

$AB > AC$ (рис. 37*а*).

Доказать:

$\angle C > \angle B$.

Доказательство:

Отложим на луче AB отрезок AD, при этом $AD = AC$. Поскольку $AC < AB$ (по условию), то и $AD < AB$, значит, точка D лежит между точками A и B (рис. 37*б*).

$\angle 1$ является частью $\angle C$, следовательно, $\angle 1 < \angle C$.

$\angle 2$ — внешний по отношению к ΔBDC, следовательно, $\angle 2 > \angle B$.

2*

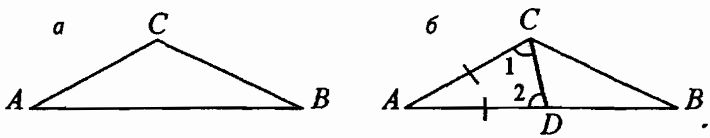


Рис. 37

$\angle 1 = \angle 2$ — по признаку равенства углов при основании равнобедренного треугольника (в данном случае ΔADC).

Поскольку $\angle 1 < \angle C$, а $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 2 < \angle C$. Значит, $\angle C > \angle B$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Дано:

ΔABC;

$\angle C > \angle B$.

Доказать:

$AB > AC$.

Доказательство:

Допустим, что $AB = AC$. Тогда ΔABC — равнобедренный, следовательно, $\angle C = \angle B$, что не так по условию.

Допустим, $AB < AC$. Тогда $\angle B > \angle C$. Это противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Следовательно, оба предположения ($AB = AC$ и $AB < AC$) неверны. Значит, верным является: $AB > AC$.

Теорема доказана.

Неравенство треугольника

Теорема: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Дано:

ΔABC.

Доказать:
$AB < AC + CB$.
Доказательство:
Рассмотрим ΔABC (рис. 38).

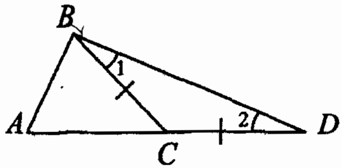


Рис. 38

Отложим на прямой AC отрезок CD, при этом $CD = CB$. ΔBCD — равнобедренный с основанием BD, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle ABD > \angle 1$, а значит, $\angle ABD > \angle 2$. Поскольку в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AD > AB$.

$AD = AC + CD$, а также $AD = AC + CB$. Следовательно, $AB < AC + CB$.

Теорема доказана.

Равенство треугольников

Если два треугольника полностью совместятся при наложении, они считаются равными. У таких треугольников все элементы (стороны и углы) одной фигуры равны соответствующим элементам другой фигуры (рис. 39).

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

На чертеже равные отрезки обозначают одной, двумя или тремя черточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

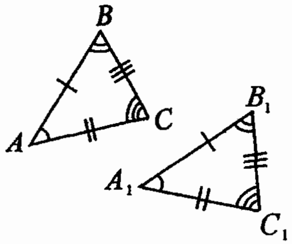


Рис. 39

В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против соответственно равных углов лежат равные стороны.

Равенство треугольников пишется: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Порядок букв в назывании треугольников имеет особое значение. Данный порядок означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Если равенство записано следующим образом: ΔABC и $\Delta B_1A_1C_1$, это означает, что $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Свойство треугольника

Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников

Теорема: если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано:
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$AB = A_1B_1$;
$AC = A_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$.
Доказать:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
Доказательство:
Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 40).

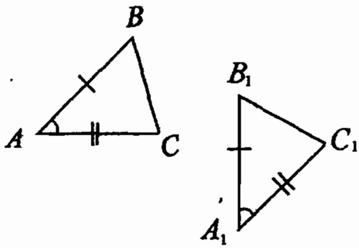


Рис. 40

Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совпала с A_1, что возможно в силу равенства углов: $\angle A = \angle A_1$. Сторона AB наложилась на отрезок A_1B_1, а сторона AC наложилась на отрезок A_1C_1. В результате сторона AB совместится со стороной A_1B_1, поскольку по условию $AB = A_1B_1$. Сторона AC совместится со стороной A_1C_1, поскольку $AC = A_1C_1$. Точка B совместится с точкой B_1, точка C совместится с точкой C_1. Сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны.

Теорема, выражающая собой признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, доказана.

Второй признак равенства треугольников

Теорема: если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$;

$\angle B = \angle B_1$;

$AB = A_1B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 41).

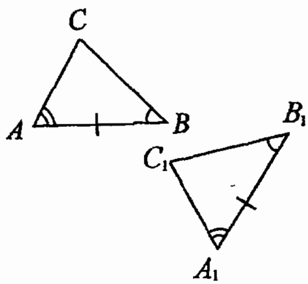


Рис. 41

По условию у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$. Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — со стороной A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Поскольку $\angle A = \angle A_1$, то сторона AC наложится на отрезок A_1C_1, а поскольку $\angle B = \angle B_1$, то сторона BC наложится на отрезок B_1C_1. Вершина C окажется лежащей на отрезках AB и A_1B_1 и совместится общей точкой этих отрезков точкой C_1. Соответственно совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Вывод: ΔABC полностью совместится с $\Delta A_1B_1C_1$, а значит, они равны.

Теорема, выражающая собой признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам, доказана.

Третий признак равенства треугольников

Теорема: если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$AB = A_1B_1$;

$BC = B_1C_1$;

$AC = A_1C_1$.

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 42).

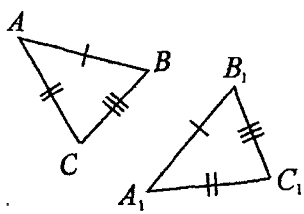


Рис. 42

Совместим сторону AB ΔABC со стороной A_1B_1 $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины C и C_1 оказались в разных полуплоскостях от прямой AB. Соединим отрезком точки C и C_1. При этом возможны три случая. Рассмотрим их.

1. Отрезок CC_1 расположен внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 43*а*).

ΔA_1CC_1 и ΔB_1CC_1 — равнобедренные, поскольку по условию $AC = AC_1$, $BC = B_1C_1$. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ — по свойству углов при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$, т. к. $\angle A_1C_1B_1 = \angle 2 + \angle 4$, $\angle A_1CB_1 = \angle 1 + \angle 3$.

Вывод: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ на основании первого признака равенства треугольников: $AC = AC_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

2. Отрезок CC_1 расположен вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 43*б*).

ΔC_1A_1C к ΔC_1B_1C — равнобедренные, т. к. по условию $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ — по свойству углов при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle CC_1B_1 - \angle CC_1A_1$, $\angle A_1CB_1 = \angle C_1CB_1 - \angle C_1CA_1$.

Вывод: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ на основании первого признака равенства треугольников: $A_1C = AC_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle A_1CB_1$.

3. Отрезок CC_1 совпадает с одной из сторон угла $A_1C_1B_1$ (рис. 43*в*).

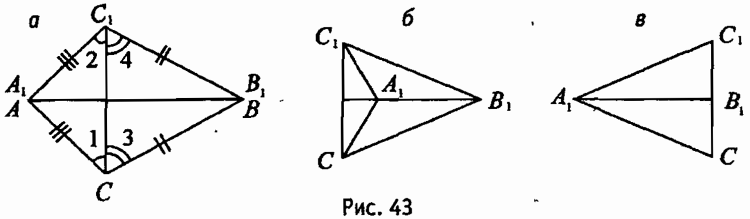


Рис. 43

ΔC_1A_1C — равнобедренный, поскольку по условию $AC = A_1C_1$. $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$ — по свойству углов при основании равнобедренного треугольника.

Вывод: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ на основании первого признака равенства треугольников: $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$; $AC = AC_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A_1C_1B. = \angle A_1CB_1$.

Теорема, выражающая признак равенства треугольников по трем сторонам, доказана полностью.

Равнобедренный треугольник

Равнобедренным называется треугольник, если две из его сторон равны (рис. 44).

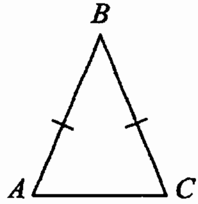


Рис. 44

Эти стороны являются боковыми сторонами, а третья — основанием равнобедренного треугольника.

Свойства равнобедренного треугольника

Теорема: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Дано:

ΔABC;

$AB = BC$.

Доказать:

$\angle A = \angle C$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 45).

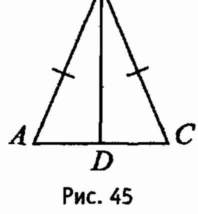


Рис. 45

У него $AB = BC$ — по условию. Выполним дополнительный чертеж: BD — биссектриса ΔABC. Образуются треугольники BDA и BDC. Они равны по первому признаку равенства треугольников, поскольку $AB = BC$ (по условию), BD — общая сторона, $\angle ABD = \angle DBC$ (т. к. BD — биссектриса). Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle C$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Дано:

ΔABC;

$\angle A = \angle C$.

Доказать:

$AB = BC$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 46).

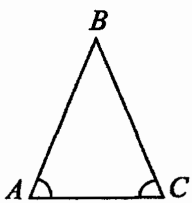


Рис. 46

$\Delta ABC = \Delta BAC$ по второму признаку равенства треугольников: $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Отсюда следует, что $AB = BC$.

Теорема доказана.

Теорема: в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Дано:
ΔABC;
$AB = BC$;
$\angle 1 = \angle 2$.
Доказать:
$AD = DC$;
$\angle 3 = \angle 4 = 90°$.
Доказательство:
Рассмотрим ΔABC (рис. 47).

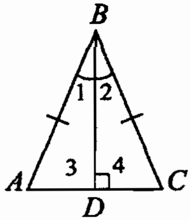


Рис. 47

По условию у него $AB = BC$, а $\angle 1 = \angle 2$ по свойству биссектрисы угла. Образовавшиеся треугольники ΔBDA и ΔBDC равны по первому признаку равенства треугольников, т. к. $AB = BC$ (по условию), BD — общая сторона $\angle 1 = \angle 2$ (по условию). Из равенства треугольников следует, что $AD = DC$. Поскольку $\angle 3$ и $\angle 4$ — смежные, а также $\angle 3 = \angle 4$, следовательно, $\angle 3 = \angle 4 = 90°$.

Вывод: $AD = DC$, т. е. точка D находится в середине отрезка AC, значит, отрезок BD, являющийся биссектрисой равнобедренного треугольника ABC, является также и его медианой.

$\angle 3 = \angle 4 = 90°$, следовательно, биссектриса BD является также высотой треугольника ABC.

Теорема доказана.

Справедливы также следующие утверждения.

1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является также медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является также биссектрисой и высотой.

Равносторонний треугольник

Равносторонним называется треугольник, у которого все стороны имеют равную длину.

Теорема: в равностороннем треугольнике все углы равны.

Дано:

ΔABC;

$AB = BC = CA$.

Доказать:

$\angle A = \angle B = \angle C$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 48).

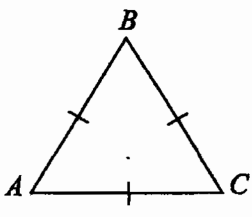


Рис. 48

Поскольку $AB = BC$, то этот треугольник равнобедренный с основанием AC. Согласно теореме о равенстве углов, лежащих в основании равнобедренного треугольника, $\angle C = \angle A$. Поскольку $BC = CA$, то ΔABC можно считать равнобедренным с основанием AB. Согласно теореме о равенстве углов, лежащих в основании равнобедренного треугольника, $\angle A = \angle B$.

Итак, $\angle A = \angle B = \angle C$. Теорема о равенстве углов равностороннего треугольника доказана.

Прямоугольный треугольник

Прямоугольным является треугольник, один из углов которого — прямой, т. е. равен 90°. Два других угла — острые, их сумма равна 90° (исходя из того, что сумма всех углов треугольника равна 180°).

В треугольнике не может быть больше 2 прямых углов, поскольку иначе сумма углов треугольника будет больше 180°, что невозможно.

Гипотенузой называется сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу. Две прилежащие к прямому углу стороны называются *катетами* (рис. 49).

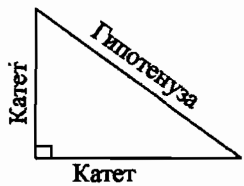


Рис. 49

В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы больше длин каждого катета.

Свойства прямоугольного треугольника

Теорема: сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Дано:

ΔABC;

$\angle A = 90°$ (рис. 50).

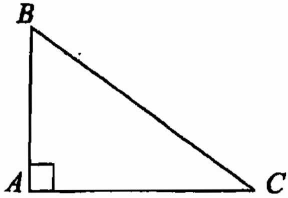


Рис. 50

Доказать:

$\angle B + \angle C = 90°$.

Доказательство:

Согласно теореме о сумме углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Поскольку $\angle A = 90°$ по условию, то равенство можно записать следующим образом: $90° + \angle B + \angle C = 180°$. Отсюда: $\angle B + \angle C = 180° - 90° = 90°$.

Итак, $\angle B + \angle C = 90°$.

Теорема доказана.

Теорема: катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Дано:

ΔABC;

$\angle BAC = 90°$;

$\angle BCA = 30°$.

Доказать:

$AB = 1/2\, BC$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 51*а*). Поскольку $\angle BCA = 30°$, то из теоремы о сумме острых углов прямоугольного треугольника выводим: $\angle ABC = 60°$.

Построим ΔACD, равный ΔABC и имеющий с ним одну общую сторону AC (рис. 51*б*).

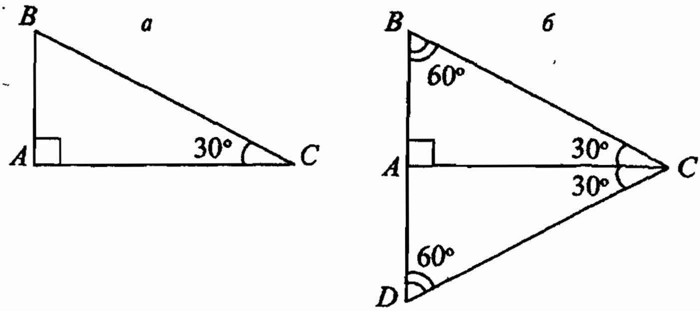


Рис. 51

Получили ΔBCD, в котором $\angle C = \angle BCA + \angle DCA = 30° + 30° = 60°$. $\angle D = \angle B = 60°$. Следовательно, $\angle D = \angle C = 60°$. Значит, ΔBCD — равносторонний, т. е. $BC = CD = DB$. $AB = 1/2\ DB$. Поскольку $DB = BC$, то $AB = 1/2\ BC$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Дано:

ΔABC;

$\angle BAC = 90°$;

$AB = 1/2\ BC$.

Доказать:

$BCA = 30°$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 52*а*). Построим ΔADC, равный ΔABC, при этом треугольники имеют общую сторону AC (рис. 52*б*).

Получился ΔBCD. У него $BC = CD$, а $BD = AB + AD$.

$AB = AD = 1/2\ BD$, следовательно, $BD = 1/2\ BC \times 2 = BC$.

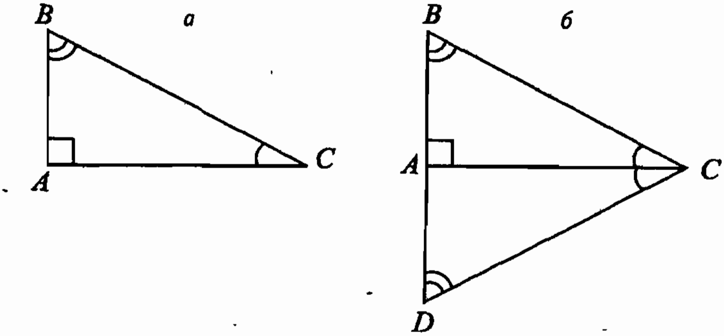


Рис. 52

Итак, в ΔBCD $BC = CD = DB$. Значит, ΔBCD — равносторонний. Соответственно в нем $\angle B = \angle C = \angle D$ (по свойству углов равностороннего треугольника). Поскольку сумма углов любого треугольника равна 180°, то $\angle B = \angle C = \angle D = 180°/3 = 60°$.

$\angle C = \angle BCA + \angle ACD$. Поскольку $\angle BCA = \angle ACD$, а $\angle C = 60°$, то $\angle BCA = 60°/2 = 30°$.

Итак, $\angle BCA = 30°$.

Теорема доказана.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Признак равенства по катетам: если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (по первому признаку равенства треугольников).

2. Признак равенства по катету и прилежащему к нему острому углу: если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (по второму признаку равенства треугольников).

3. Признак равенства по гипотенузе и острому углу: если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные;

$\angle A$ и $\angle A_1 = 90°$;

$BC = B_1C_1$;

$\angle B = \angle B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 53).

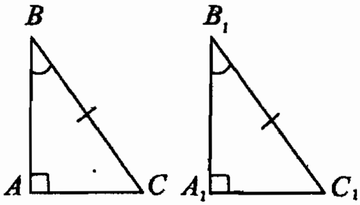


Рис. 53

У них $\angle A$ и $\angle A_1 = 90°$, а $\angle B = \angle B_1$ по условию. Из теоремы о сумме углов треугольника, выводим, что $\angle C = \angle C_1$. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников (по равенству гипотенузы и двух прилежащих к ней углов).

4. Признак равенства по катету и противолежащему углу: если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны (доказывается так же, как и предыдущая теорема).

5. Признак равенства по гипотенузе и катету: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные;

$\angle A$ и $\angle A_1 = 90°$;

$BC = B_1C_1$;

$AB = A_1B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 54*а*). Наложим треугольники друг на друга, совместив вершины $\angle A$ и $\angle A_1$, т. к. $A = A_1$ по условию. Стороны AB и AC совместятся со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Поскольку $AB = A_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1.

Предположим, что точка C не совместилась с точкой C_1 (рис. 54*б*).

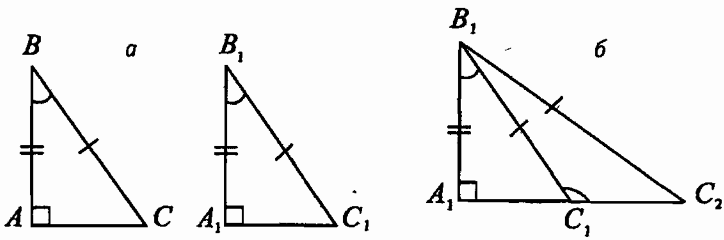


Рис. 54

Допустим, она совместилась с точкой C_2, принадлежащей лучу A_1C_1. Соединим точку C_2 с точкой B_1. Получим $\Delta C_1B_1C_2$ с основанием C_1C_2. Углы при основании этого треугольника не равны, поскольку $\angle B_1C_1C_2$ — тупой (как смежный с $\angle B_1C_1A_2$), $\angle C_1C_2B_1$ — острый. Значит, стороны C_1B_1 и C_2B_1 не равны. Но это противоречит условию. Следовательно, предположение, что C не совместится с точкой C_1, неверно. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, т. е. они равны.

Теорема доказана.

Неравенство треугольника

Теорема: каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

Дано:

точки A, B, C.

Доказать:

$AB \le AC + BC$.

Доказательство:

1. Пусть две или все три точки совпадают, тогда очевидно, что $AB = AC + BC$.

2. Пусть все три точки различны и лежат на одной прямой (рис. 55*а*). Одна из них будет обязательно находиться между двумя другими точками. В этом случае $AB = AC + BC$.

3. Пусть точки не лежат на одной прямой (рис. 55*б*).

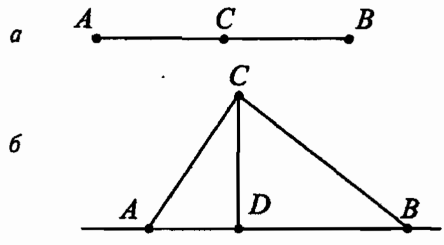


Рис. 55

Соединим все три точки и построим треугольник ABC. Опустим перпендикуляр из вершины C к стороне AB. Получилось два прямоугольных треугольника — ACD и BDC.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катетов, следовательно:

$AD < AC$; $BD < BC$.

Поскольку $AB = AD + DB$, то $AB \leq AC + BC$.

Теорема доказана.

Глава 6
ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется геометрическая фигура, все точки которой равно удалены от одной точки на заданное расстояние. Данная точка называется *центром окружности*.

Радиусом окружности называется отрезок, проведенный от центра к любой точке окружности (рис. 56). Радиус обозначается буквой r.

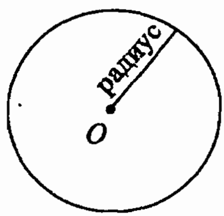


Рис. 56

Свойство радиусов: все радиусы одной окружности имеют одну длину.

Хордой называется отрезок, соединяющий две любые точки окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр окружности. На рисунке 57 отрезки AB и CD — хорды, отрезок MN — диаметр окружности с центром в точке O.

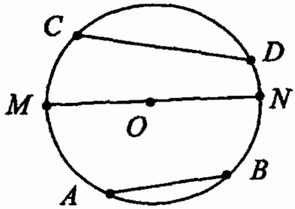


Рис. 57

Если на окружности поставить любые две точки, они разделят окружность на две части, которые называются *дугами окружности*. На рисунке 58 AMC и ANC — дуги окружности, ограниченные точками A и C.

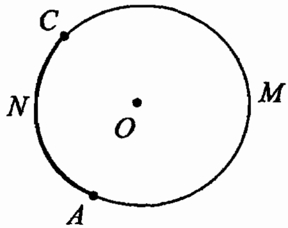


Рис. 58

Касательная к окружности

Касательной к окружности называют прямую, проходящую через одну точку окружности, перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку. Данная точка окружности называется *точкой касания* (рис. 59*а*).

Теорема: касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Дано:
т. O — центр окружности;
прямая a — касательная;
т. A — точка касания.
Доказать:
$AO \perp a$.
Доказательство:

Допустим, что радиус AO не перпендикулярен прямой a. Тогда AO — наклонная к прямой a. Перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой a, должен быть меньше наклонной AO. Соответственно и расстояние от O до a меньше AO. Значит, прямая a имеет две общие точки с окружностью. Но это противоречит условию, поскольку прямая a — касательная. Следовательно, прямая $a \perp AO$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной

Дано:
т. O — центр окружности;
AO — радиус;
т. A — точка касания;
$AO \perp a$.
Доказать:
прямая a — касательная.
Доказательство:

Согласно условию радиус AO окружности является перпендикуляром, проведенным из центра O окружности к прямой a. Соответственно расстояние от центра окружности O до прямой a равно радиусу AO. Значит, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Следовательно, прямая a является касательной к данной окружности.

Теорема доказана.

Теорема: отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки (находящейся вне окружности), равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Дано:

т. O — центр окружности (рис. 59*б*);

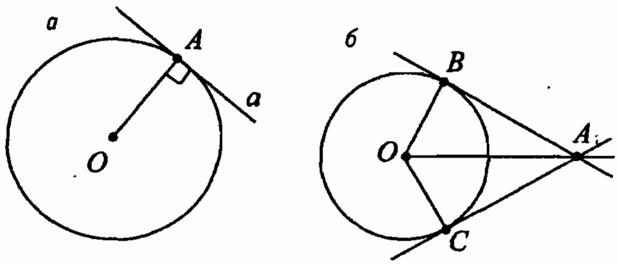


Рис. 59

AB и AC — касательные;

$AB \cap AC$ в т. A.

Доказать:

$AB = AC$;

$\angle BAO = \angle OAC$.

Доказательство:

Согласно теореме о свойстве касательной $\angle OBA$ и $\angle OCA$ — прямые. Значит, ΔOBA и ΔOCA — прямоугольные. Эти треугольники равны по гипотенузе и катету (общая гипотенуза AO и равные катеты OB и OC). Следовательно, $AB = AC$, а $\angle BAO = \angle OAC$.

Теорема доказана.

Описанная окружность

Окружностью, описанной около треугольника, называется окружность, проходящая через все его вершины.

Теорема: около любого треугольника можно описать окружность.

Дано:

ΔABC;

точка O — центр пересечения срединных перпендикуляров к его сторонам.

Доказать:

точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 60).

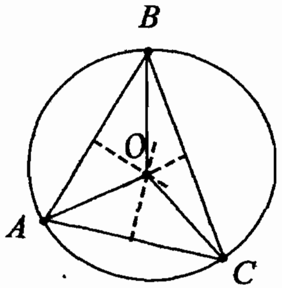


Рис. 60

Выполним дополнительные построения. Проведем из т. O отрезки OA, OB, OC.

Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, следовательно, $OA = OB = OC$. Значит, если провести окружность с центром в т. O и радиусом OA, она будет проходить через все три вершины треугольника ABC. Следовательно, она будет описанной около треугольника согласно определению описанной окружности.

Теорема доказана.

Теорема: центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров треугольника.

Дано:

ΔABC;

точка O — центр окружности, описанной около ΔABC;

OM, ON и OL — серединные перпендикуляры ΔABC.

Доказать:

OM, ON и OL пересекаются в точке O.

Доказательство:

Рассмотрим треугольник ABC и описанную окружность с центром в точке O (рис. 61).

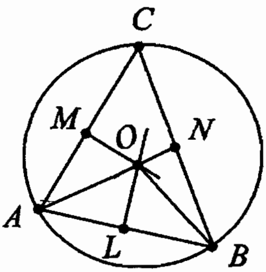


Рис. 61

Соединим точки A и B с точкой O. Получили ΔAOB. Этот треугольник — равнобедренный, т. к. $AO = BO$ (как радиусы). OL является медианой и высотой ΔAOB. Следовательно, точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Так же можно доказать, что точка O лежит на серединных перпендикулярах к другим сторонам треугольника ABC.

Таким образом, центр окружности O лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, вокруг которого она описана.

Теорема доказана.

Вписанная окружность

Вписанной в треугольник окружностью называется окружность, касающаяся всех его сторон (рис. 62).

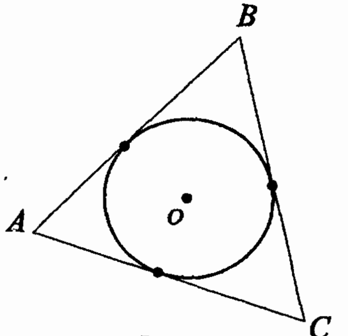


Рис. 62

Если две окружности имеют общую точку и общую касательную в этой точке, считается, что они касаются друг друга в данной точке.

Если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной, то такое касание окружностей называется *внутренним* (рис. 63).

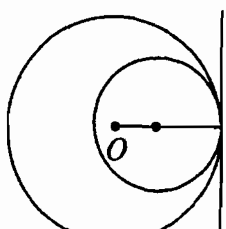


Рис. 63

Если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной, то такое касание окружностей называется *внешним* (рис. 64).

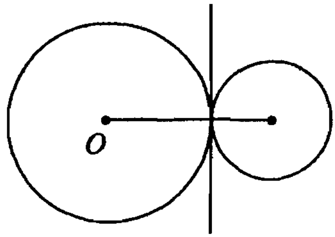


Рис. 64

Теорема: в любой треугольник можно вписать окружность.

Дано:

ΔABC точка O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Доказать:

точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 65).

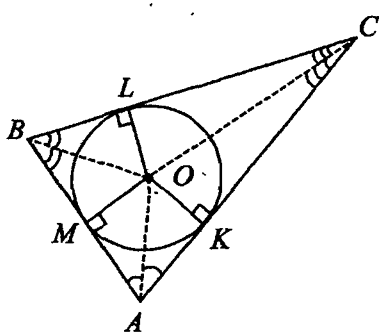


Рис. 65

Выполним дополнительные построения: проведем из точки O перпендикуляры OK, OL, OM к сторонам AC, BC, AB соответственно.

Точка O равно удалена от сторон треугольника ABC. Следовательно, $OK = OL = OM$. Значит, окружность с центром в точке O проходит через точки K, L и M. Точки K, L и M перпендикулярны радиусам OK, OL и OM, т. е. можно сказать, что окружность с центром в точке O касается сторон треугольника ABC в точках K, L, M.

Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом OK является вписанной в треугольник ABC.

Теорема доказана.

Теорема: центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Дано:

ΔABC;

т. O — центр окружности, вписанной в ΔABC;

т. L, M и N — точки касания (рис. 66).

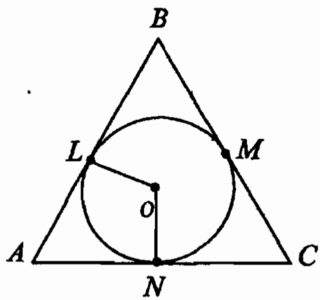


Рис. 66

Доказать:

лучи OA, OB и OC пересекаются в точке O.

Доказательство:

Соединим точки N, A, L и B с точкой O. Рассмотрим прямоугольные треугольники AON и AOL. Они равны по равенству гипотенузы и катета: AO — общая гипотенуза. $LO = NO$ — катеты (они равны как радиусы).

Поскольку $\Delta AON = \Delta AOL$, значит, $\angle AON = \angle AOL$. Следовательно, точка O лежит на биссектрисе треугольника ABC, проведенной из вершины A.

Таким же образом можно доказать, что точка O лежит на двух других биссектрисах треугольника ABC.

Теорема доказана.

Углы, вписанные в окружность

Углом, вписанным в окружность, называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность (рис. 67).

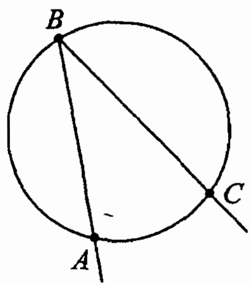


Рис. 67

Теорема: вписанный в окружность угол, стороны которого проходят через две данные точки окружности, равен половине угла между радиусами, проведенными в эти точки, или дополняет половину этого угла до 180°.

Дано:

т. O — центр окружности;

$\angle ABC$ — вписанный в данную окружность;

OC и AC — радиусы;

$\angle AOC$ — угол между радиусами.

Доказать:

$\angle B = 1/2\,\angle AOC$ или $\angle B = 180° - 1/2\,\angle AOC$.

Доказательство:

Рассмотрим 4 случая.

1. Пусть точка O лежит на отрезке AB (рис. 68).

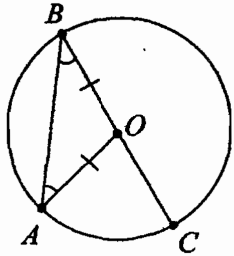


Рис. 68

Соединим точку A с точкой O. Получился равнобедренный треугольник ABO с основанием AB ($BO = AO$ как радиусы). Значит, $\angle A = \angle B$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

$\angle A + \angle B = \angle AOC$ (как внешнему при вершине O). Следовательно, $\angle B = 1/2\,\angle AOC$. Что и требовалось доказать.

2. Проведем диаметр BM внутри угла ABC (рис. 69).

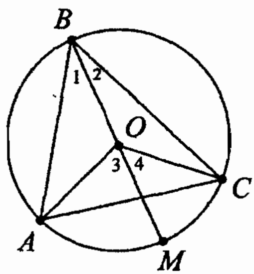


Рис. 69

$\angle B = \angle 1 + \angle 2$, $\angle AOC = \angle 3 + \angle 4$.

$\angle 1$ находится при основании равнобедренного треугольника AOB. $\angle 3$ является внешним углом треугольника AOB при вершине O. Следовательно, $\angle 1 = 1/2\,\angle 3$.

$\angle 2$ находится при основании равнобедренного треугольника COB. 4 является внешним углом треугольника COB при вершине O. Следовательно, $\angle 2 = 1/2\,\angle 4$.

Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 = 1/2\,(\angle 3 + \angle 4) = 1/2\,\angle AOC$. Значит, $\angle B = 1/2\,\angle AOC$. Что и требовалось доказать.

3. Диаметр BM проходит снаружи угла ABC (рис. 70).

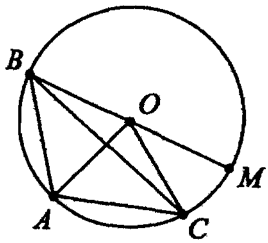


Рис. 70

$\angle B = \angle ABO - \angle CBO$, $\angle AOC = \angle AOM - \angle COM$.

$\angle ABO$ находится при основании равнобедренного треугольника AOB. $\angle AOM$ является внешним углом треугольника AOB при вершине O. Следовательно, $\angle ABO = 1/2\,\angle AOM$.

$\angle CBO$ находится при основании равнобедренного треугольника COB. $\angle COM$ является внешним углом треугольника COB при вершине O. Следовательно, $\angle CBO = 1/2\,\angle COM$.

Таким образом, $\angle B = 1/2\,(\angle AOM - \angle COM) = 1/2\,\angle AOC$. Значит, $\angle B = 1/2\,\angle AOC$, что и требовалось доказать.

4. Диаметр BM проходит внутри угла ABC (рис. 71).

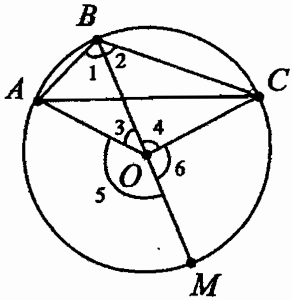


Рис. 71

$\angle B = \angle 1 + \angle 2$, $\angle AOC = \angle 3 + \angle 4$.

$\angle 1$ находится при основании равнобедренного треугольника AOB. $\angle 5$ является внешним углом треугольника AOB при вершине O. Следовательно, $\angle 1 = 1/2\ \angle 5$.

$\angle 2$ находится при основании равнобедренного треугольника COB. $\angle 6$ является внешним углом треугольника COB при вершине O. Следовательно, $\angle 2 = 1/2\ \angle 6$.

Таким образом, $\angle B = \angle 1 + \angle 2 = 1/2\ (\angle 5 + \angle 6)$.

$\angle 5$ — смежный с $\angle 3$, следовательно, $\angle 5 = 180° - \angle 3$.

$\angle 6$ — смежный с $\angle 4$, следовательно, $\angle 6 = 180° - \angle 4$.

$\angle B = 1/2\ (180° - \angle 3 + 180° - \angle 4) = 180° - 1/2\ (\angle 3 + \angle 4)$

Поскольку $\angle AOC = \angle 3 + \angle 4$, то $\angle B = 180° - 1/2\ \angle AOC$.

Теорема доказана.

Следствие

Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны (рис. 72).

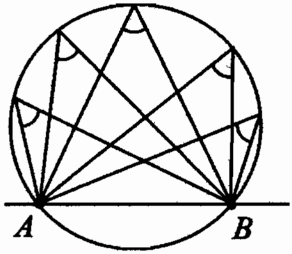


Рис. 72

Если стороны угла проходят через концы диаметра окружности, то угол прямой (рис. 73).

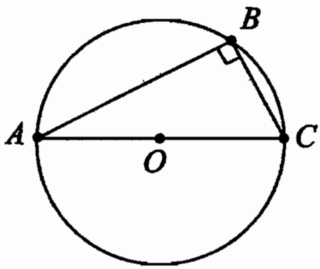


Рис. 73

Глава 7
МНОГОУГОЛЬНИКИ

Ломаная

Ломаной **называется фигура, состоящая из точек, последовательно соединенных отрезками (рис. 74).**

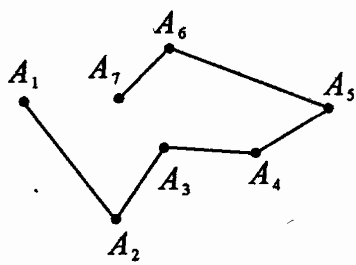


Рис. 74

Точки соединения отрезков называются *вершинами* ломаной, а соединяющие их отрезки — *звеньями* ломаной.

Ломаная может быть *простой* (рис. 75*а*) и с *самопересечением* (рис. 75*б*).

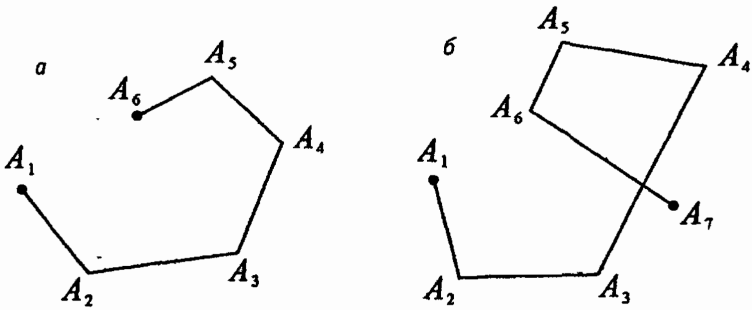


Рис. 75

Длина ломаной

Длиной ломаной является сумма длин всех ее звеньев.

Теорема: длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Дано:

ломаная $A_1A_2A_3 ... A_n$.

Доказать:

$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1} + A_n > A_1A_n$.

Доказательство:

Заменим в ломаной $A_1A_2A_3 ... A_n$ звенья A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3 (рис. 76).

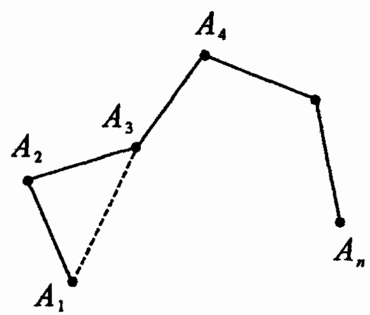


Рис. 76

Согласно неравенству треугольника $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, следовательно, длина ломаной $A_1A_3A_4 \dots A_n$ меньше длины ломаной $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Заменим в ломаной $A_1A_3A_4 \dots A_n$ звенья A_1A_3 и A_3A_4 одним звеном A_1A_4. По неравенству треугольника длина образованной ломаной также будет меньше исходной.

Производя таким способом замены звеньев, дойдем до отрезка A_1A_n, длина которого меньше длины ломаной $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Итак, мы получили, что:

$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1} + A_n > A_1A_n$.

Теорема доказана.

Многоугольники

Многоугольником называется фигура, состоящая из нескольких точек, последовательно соединенных отрезками. Эти точки называются *вершинами*. Отрезки, соединяющие точки, называются *сторонами многоугольника* (рис. 77).

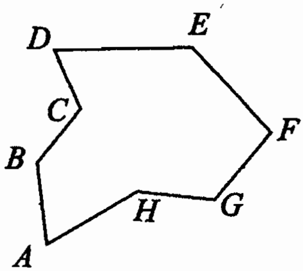


Рис. 77

Самым простым многоугольником является треугольник. Бывают также четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники и т. д.

Соседними называются две вершины, являющиеся концами одного отрезка.

Противолежащими называются не соседние вершины, не являющиеся концами одного отрезка.

Многоугольник обозначается *n*-угольником, где *n* — число вершин и сторон многоугольника.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий любые не соседние, противолежащие вершины фигуры.

Многоугольник разделяет плоскость на 2 части: внутреннюю и внешнюю.

Внутренней частью плоскости является та часть, которая лежит внутри многоугольника.

Плоским называется многоугольник, состоящий из ограниченной сторонами многоугольника внутренней части плоскости (рис. 78).

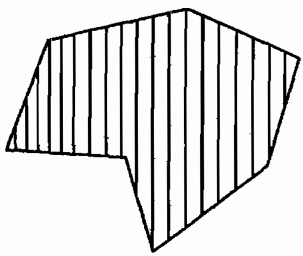


Рис. 78

Выпуклый многоугольник

Выпуклым называется многоугольник, все части которого лежат по одну сторону от каждой прямой, проходящей через любые его две вершины. На рисунке 79*а* изображен выпуклый многоугольник, на рисунке 79*б* — невыпуклый.

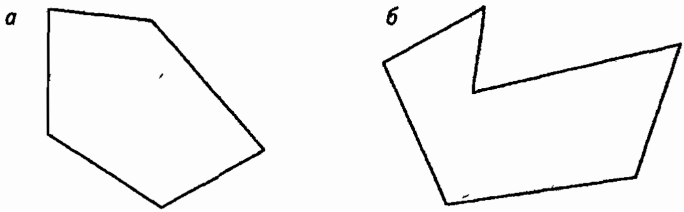


Рис. 79

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине является угол, образованный сторонами многоугольника, имеющими общую точку в этой вершине.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине является угол, смежный внутреннему углу многоугольника при данной вершине.

Теорема: сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

Дано:

$A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — выпуклый многоугольник.

Доказать:

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 \ldots + \angle A_n = 180°(n - 2)$.

Доказательство:

Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (рис. 80). Проведем диагональ A_1A_3.

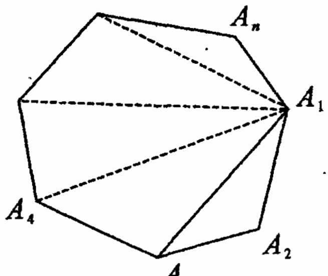


Рис. 80

Многоугольник разделился на две фигуры: треугольник $A_1A_2A_3$ и многоугольник $A_1A_3A_4 \dots A_n$, имеющий $n - 1$ вершин.

$\angle A_1 = \angle A_nA_1A_3 + \angle A_3A_1A_2$; $\angle A_3 = \angle A_2A_3A_1 + \angle A_1A_3A_4$.

Сумма углов многоугольника равна $A_1A_2A_3 \dots A_n$ равна сумме углов треугольника $A_1A_2A_3$ и многоугольника. Следовательно:

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 \dots + \angle A_n = \angle A_nA_1A_3 + \angle A_3A_1A_2 + \angle A_2 + \angle A_2A_3A_1 + \angle A_1A_3A_4 + \angle A_4 + \dots + \angle A_n = 180° + \angle A_nA_1A_3 + \angle A_1A_3A_4 + \angle A_4 + \dots + \angle A_n$.

Таким же образом выводим, что сумма углов многоугольника $A_1A_3A_4 \dots A_n$ равна сумме углов треугольника $A_1A_3A_4$ и многоугольника $A_1A_4A_5 \dots A_n$:

$\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_4 \dots + \angle A_n = 180° + \angle A_nA_1A_4 + \angle A_1A_4A_5 + \angle A_5 + \dots + \angle A_n$.

Если продолжить, то на шаге $(n - 3)$ мы получим треугольник $A_1A_{n-1}A_n$, сумма углов которого равна 180°. Таким образом, получим:

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 \dots + \angle A_n = 180°(n - 3) + 180° = 180°(n - 2)$.

Теорема доказана.

Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называют выпуклый многоугольник, все углы и стороны которого равны.

Формула нахождения угла правильного многоугольника

Выведем формулу для вычисления угла a_n правильного n-угольника.

Сумма всех углов n-угольника равна $180°(n - 2)$. Поскольку в правильном многоугольнике все углы равны, угол a_n будет равен:

$$a_n = 180°(n - 2)/n.$$

Четырехугольники

Четырехугольником называется фигура, состоящая из четырех точек, последовательно соединенных отрезками.

Стороны четырехугольника, имеющие общую точку соединения в конце отрезка, называются *соседними*.

Стороны четырехугольника, не имеющие общей точки, называются *противоположными*.

Диагоналями четырехугольника являются отрезки, соединяющие его противолежащие вершины. Четырехугольник имеет две диагонали (рис. 81).

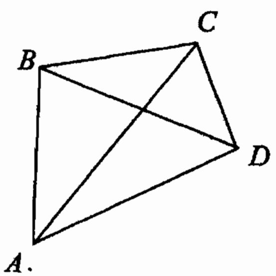


Рис. 81

Четырехугольник обозначается его вершинами. Например, четырехугольник $ABCD$ или четырехугольник $KLMN$.

Четырехугольники бывают выпуклыми и невыпуклыми.

В *выпуклом* четырехугольнике каждая диагональ делит его на 2 треугольника (рис. 82*а*, *б*).

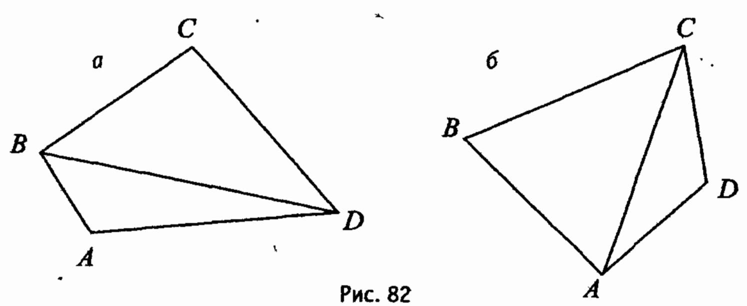


Рис. 82

В *невыпуклом* четырехугольнике только одна из диагоналей делит фигуру на два треугольника (рис. 83).

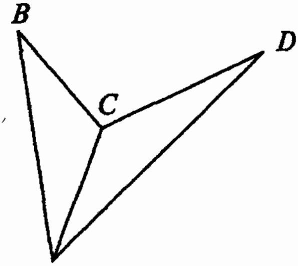


Рис. 83

В связи с этим можно сделать вывод: сумма углов четырехугольника равна 360° (как сумма углов двух треугольников = 180° + 180°).

Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны (рис. 84).

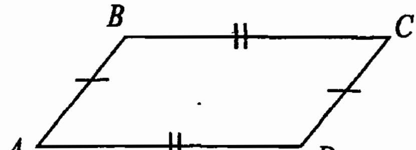


Рис. 84

Свойства параллелограмма

Теорема: у параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Дано:

ABCD — параллелограмм;

$AB \parallel CD$;

$AD \parallel BC$.

Доказать:

$AB = CD$;

$CB = AD$;

$\angle B = \angle D$;

$\angle A = \angle C$.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 85*а*). Выполним дополнительное построение: проведем диагональ AC.

$\Delta ACB = \Delta CAD$ — по второму признаку равенства треугольников (стороне и прилежащим к ней углам):

CA — общая сторона;

$\angle ACB = \angle CAD$ (как накрест лежащие при $CB \parallel AD$ и секущей CA);

$\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей CA).

Из равенства треугольников следует, что $CB = AD$; $AB = CD$; $\angle B = \angle D$ (рис. 85*б*).

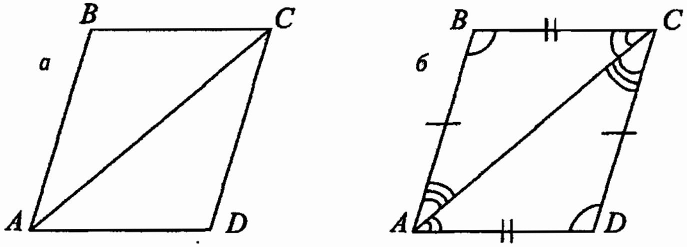


Рис. 85

$\angle A = \angle BAC + \angle CAD$; $\angle C = \angle ACB + \angle DCA$; $\angle BAC + \angle CAD = \angle ACB + \angle ACD$ (т. к. $\angle ACB = \angle CAD$; $\angle BAC = \angle ACD$), следовательно, $\angle A = \angle C$.

Теорема доказана.

Теорема: диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм;

AC и BD — диагонали;

$AC \cap BD$;

т. O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

Доказать:

$AO = OC$, $BO = OD$.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 86*а*).

$\Delta AOB = \Delta COD$ по второму признаку равенства треугольников (стороне и прилежащим к ней углам):

$AB = CD$ — по свойству противоположных сторон параллелограмма;

$\angle DBA = \angle BDC$ (как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BD);

$\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей CA) (рис. 86*б*).

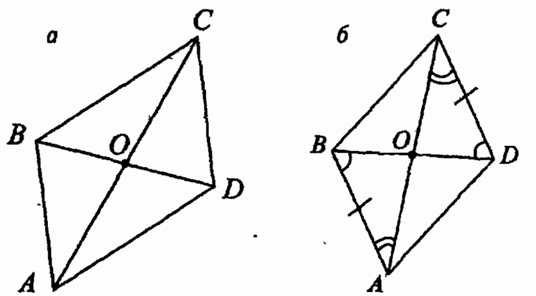


Рис. 86

Из равенства треугольников следует, что $AO = OC$; $OB = OD$.

Теорема доказана.

Признаки параллелограмма

Теорема: если у четырехугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник;

$AB = CD$;

$AB \parallel CD$.

Доказать:

$ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 87*а*). Проведем диагональ AC.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по первому признаку равенства треугольников (двум сторонам и углу между ними):

AC — общая сторона;

$AB = CD$ — по условию;

$\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей CA) (рис. 87*б*).

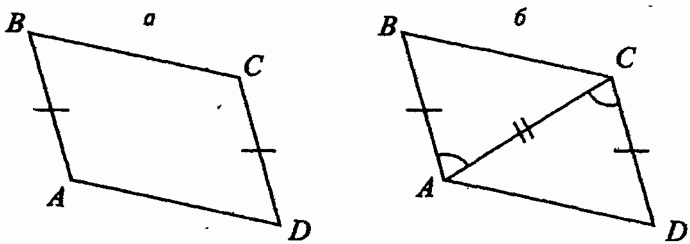


Рис. 87

Из равенства треугольников следует, что $\angle ACB = \angle CAD$. Однако эти углы являются накрест лежащими при пересечении прямых CB и AD секущей CA. Следовательно, прямые CB и AD параллельны.

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $CB \parallel AD$. Значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема доказана.

Теорема: если у четырехугольника противоположные стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник;

$AB = CD$;

$AD = BC$.

Доказать:

$ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 88*а*). Проведем диагональ AC.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по третьему признаку равенства треугольников (трем сторонам):

AC — общая сторона;

$AB = CD$ — по условию;

$AD = BC$ — по условию.

Из равенства треугольников следует, что $\angle BAC = \angle DCA$ (рис. 88*б*). Значит, $AB \parallel CD$.

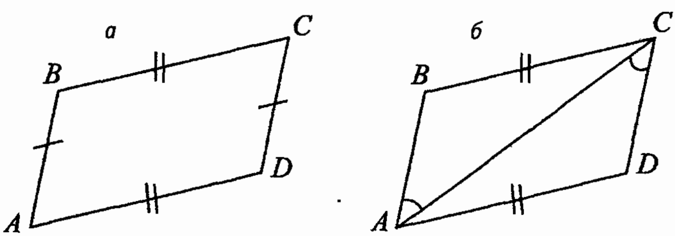


Рис. 88

Поскольку $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по первому признаку параллелограмма (две стороны равны и параллельны) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема доказана.

Теорема: если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Дано:

$ABCD$ — четырехугольник;

AC и BD — диагонали;

$AC \cap BD$ в точке O;

$AO = OC$, $BO = OD$.

Доказать:

$ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 89*а*). $\Delta AOD = \Delta COB$ по первому признаку равенства треугольников (двум сторонам и углу между ними):

$\angle AOD = \angle BOC$ (как вертикальные);

$AO = OC$, $BO = OD$ (по условию) (рис. 89*б*).

Из равенства треугольников следует, что $\angle OBC = \angle ODA$. Между тем эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей DB. Значит, прямые AD и BC параллельны.

Рассмотрим треугольники AOB и DOC (рис. 89*в*).

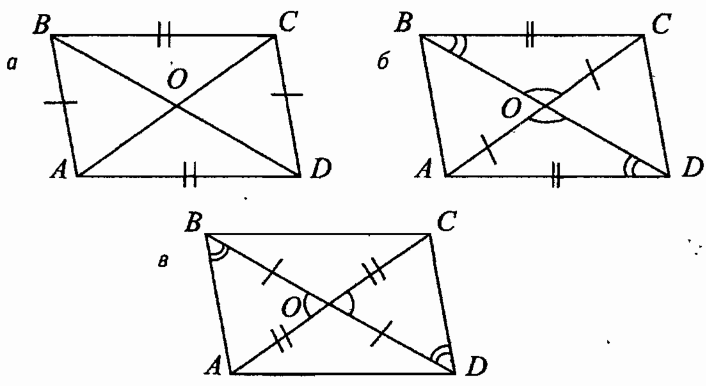


Рис. 89

$\Delta AOB = \Delta DOC$ по первому признаку равенства треугольников (двум сторонам и углу между ними):

$\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные);

$AO = OC$, $BO = OD$ (по условию).

Из равенства треугольников следует, что $\angle ABO = \angle ODC$. Между тем эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей BD. Значит, прямые AB и CD параллельны.

Итак, $AB = CD$, $AB \parallel CD$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема доказана.

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 90).

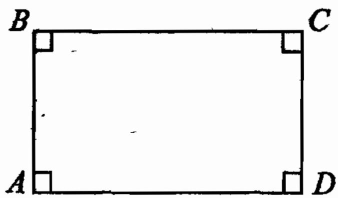


Рис. 90

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма:

1) противоположные стороны равны;

2) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Особое свойство прямоугольника

Теорема: диагонали прямоугольника равны.

Дано:

$ABCD$ — прямоугольник;

AC и BD — диагонали.

Доказать:

$AC = BD$.

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 91*а*). $\Delta DAB = \Delta DAC$ по первому признаку равенства треугольников (двум сторонам и углу между ними):

$\angle A$ и $\angle D$ — прямые;

катет AD — общий;

катеты AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма (рис. 91*б*).

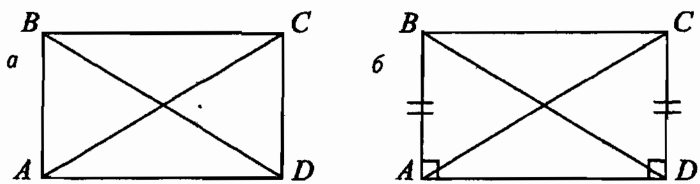


Рис. 91

Из равенства треугольников выводим, что их гипотенузы AC и BD равны.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если у параллелограмма диагонали равны, этот параллелограмм — прямоугольник

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм;

AC и BD — диагонали;

$AC = BD$.

Доказать:

$ABCD$ — прямоугольник.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 92*а*) $\Delta DAB = \Delta DAC$ по третьему признаку равенства треугольников (по трем сторонам):

$AB = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма);

$AC = BD$ (как диагонали);

сторона AD — общая (рис. 92*б*).

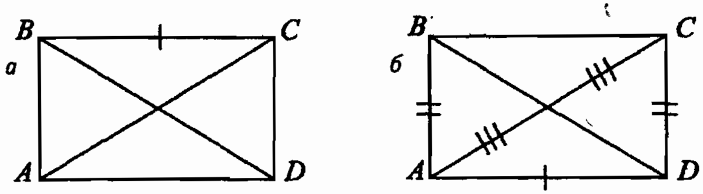


Рис. 92

Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle D$.

Поскольку у параллелограмма противоположные углы равны, то можно вывести, что $\angle A = \angle C$, а $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D$.

Сумма углов параллелограмма равна 360°, т. е. $\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360°$. Поскольку мы вывели, что в параллелограмме $ABCD$ все углы равны, то $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 360°/4 = 90°$. Значит, параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

Теорема доказана.

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 93).

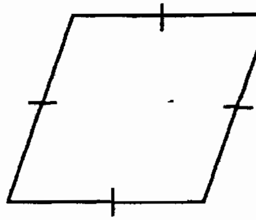


Рис. 93

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Особое свойство ромба

Теорема: диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Дано:

$ABCD$ — ромб (рис. 94*а*);

AC и BD — диагонали.

Доказать:

$AC \perp BD$;

$\angle DBC = \angle ABD$;

$\angle ACD = \angle BCA$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 94*б*). Точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD. $AO = OC$ (признак параллелограмма). Значит, OB является медианой ΔABC.

$AB = BC$ (по определению ромба). Следовательно, ΔABC — равнобедренный. Значит, медиана OB является также биссектрисой ΔABC, соответственно и биссектрисой B. Значит, $\angle ABO = \angle OBC$, соответственно и $\angle ABD = \angle DBC$ (т. к. отрезок BO лежит на луче BD).

OB является также высотой ΔABC (по свойству медианы равнобедренного треугольника). Значит, $AC \perp BO$, соответственно $AC \perp BD$ (т. к. отрезок BO лежит на луче BD).

Рассмотрим ΔBCD (рис. 94*в*). $BO = OD$ (признак параллелограмма). Значит, OC является медианой ΔBCD.

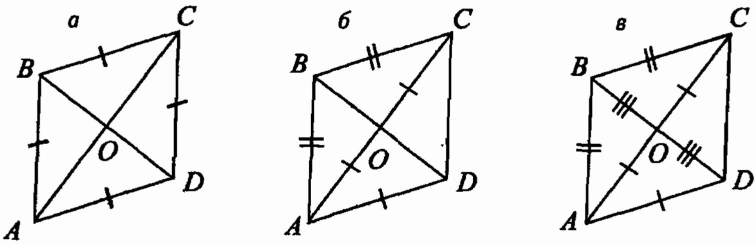


Рис. 94

$BC = CD$ (по определению ромба). Следовательно, ΔBCD — равнобедренный. Значит, медиана OC является также биссектрисой ΔBCD, соответственно и биссектрисой C. Значит, $\angle BCO = \angle OCD$, соответственно и $\angle BCA = \angle ACD$ (поскольку отрезок CO лежит на луче CA).

Итак, мы доказали, что $\angle DBC = \angle ABD$, $\angle ACD = \angle BCA$, $AC \perp BD$.

Теорема доказана.

Признаки ромба

1) если в параллелограмме диагонали перпендикулярны или являются биссектрисами его углов, то этот параллелограмм — ромб;

2) если в четырехугольнике все стороны равны, то этот четырехугольник является ромбом.

Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 95).

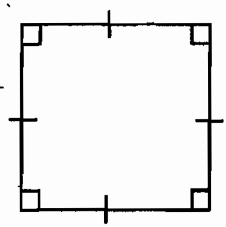


Рис. 95

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба:

1) все углы прямые;

2) диагонали равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам, а также делят углы квадрата пополам.

Признак квадрата

Если диагонали прямоугольника равны, то этот прямоугольник является квадратом.

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Основаниями трапеции называют ее параллельные стороны.

Боковыми сторонами трапеции называют ее не параллельные стороны (рис. 96*а*).

Равнобедренной называется трапеция, у которой боковые стороны равны (рис. 96*б*).

Прямоугольной называется трапеция, один из углов которой прямой (рис. 96*в*).

Средней линией трапеции называется отрезок, который соединяет середины боковых сторон (рис. 96*г*).

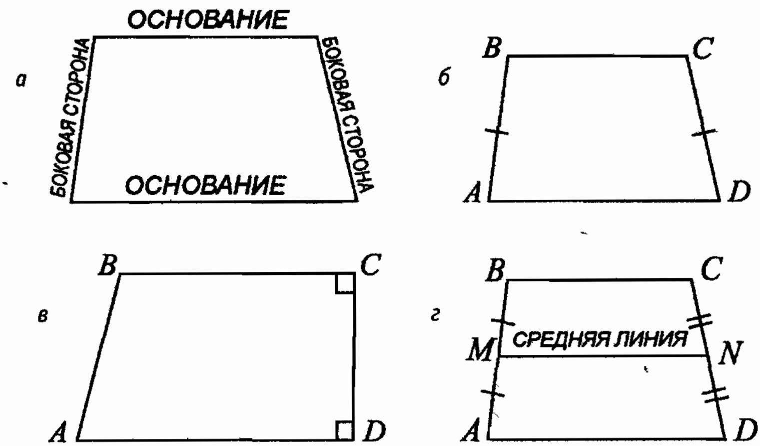


Рис. 96

Прежде чем рассмотреть свойства трапеции, рассмотрим и докажем теорему Фалеса (древнегреческого ученого, жившего в VI в. до н. э.), а также теорему о средней линии треугольника.

Теорема Фалеса

Теорема: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Дано:

$\angle ab$;

A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых со стороной a угла ab;

т. A_2 лежит между т. A_1 и т. A_3;

B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения тех же параллельных прямых со стороной b угла ab;

т. B_2 лежит между т. B_1 и т. B_3;

$A_1A_2 = A_2A_3$.

Доказать:

$B_1B_2 = B_2B_3$.

Доказательство:

Рассмотрим $\angle ab$ (рис. 97*а*). Выполним дополнительные построения: проведем через т. B_2 прямую c, параллельную прямой a. Прямая c пересечет параллельные прямые A_1B_1 и A_3B_3 в точках C_1 и C_3 соответственно (рис. 97*б*).

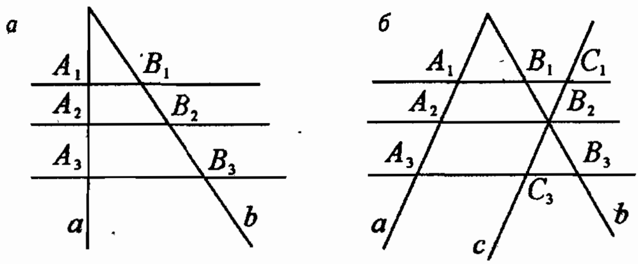


Рис. 97

Четырехугольник $A_2A_1C_1B_2$ — параллелограмм, т. к. $A_1A_2 \parallel C_1B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. По свойству сторон параллелограмма $A_1A_2 = C_1B_2$, $A_1C_1 = A_2B_2$.

Четырехугольник $A_3A_2B_2C_3$ — параллелограмм, поскольку $A_3A_2 \parallel C_3B_2$, $A_3C_3 \parallel A_2B_2$. По свойству сторон параллелограмма $A_3A_2 = C_3B_2$, $A_3C_3 = A_2B_2$.

Поскольку $A_1A_2 = A_2A_3$ (по условию), то $C_1B_2 = B_2C_3$.

Рассмотрим треугольники $B_2B_1C_1$ и $B_2B_3C_3$. Они равны по второму признаку равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам):

$C_1B_2 = B_2C_3$;

$\angle B_1B_2C_1 = \angle C_3B_2B_3$ — как вертикальные;

$\angle B_1C_1B_2 = \angle B_2C_3B_3$ — как накрест лежащие при $A_1B_1 \parallel A_3B_3$ и секущей C_1C_3.

Из равенства треугольников $B_2B_1C_1$ и $B_2B_3C_3$ следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема доказана.

Теорема о средней линии треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух из его сторон (рис. 98).

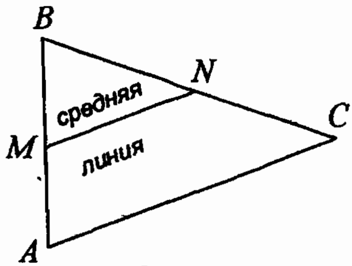


Рис. 98

Теорема: средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Дано:

ΔABC;

MN — средняя линия ΔABC;

$AM = MB$;

$BN = NC$.

Доказать:

$MN \parallel AC$;

$MN = 1/2\,AC$.

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔABC (рис. 99).

Через точку M проведем прямую $l \parallel AC$. Эта прямая пересечет отрезок BC в точке L. При этом получится, что $BL = LC$ (по теореме Фалеса). Значит, точка L принадлежит средней линии треугольника и совпадает с точкой N. Следовательно, ML совпадет с MN. Поскольку ML лежит на прямой $l \parallel AC$, то и $MN \parallel AC$.

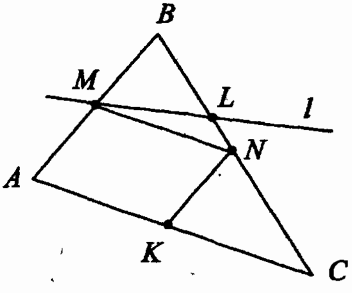


Рис. 99

2. Выполним дополнительное построение: через точку N проведем среднюю линию NK, т. е. $AK = KC$.

Образованный четырехугольник $AMNK$ — параллелограмм, т. к. $AM \parallel NK$, $MN \parallel AK$. Поскольку $MN = AK$ (по свойству параллелограмма), $AK = KC$, $AK + KC = AC$, можно вывести, что $MN = 1/2\,AC$.

Теорема доказана.

Теорема о средней линии трапеции

Теорема: средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Дано:

$ABCD$ — трапеция;

BC и AD — основания;

MN — средняя линия;

$AM = MB$;

$CN = ND$.

Доказать:

$MN \parallel AB \parallel CD$;

$MN = 1/2\,(BC + AD)$.

Доказательство:

Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 100).

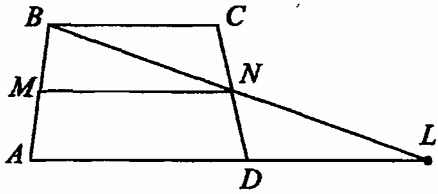


Рис. 100

Выполним дополнительные построения. Проведем через вершину B и точку N прямую. Точка L — точка пересечения прямых BN и AD.

$\Delta BCN = \Delta LDN$ по второму признаку равенства треугольников (стороне и прилежащим к ней углам):

$CN = ND$ (по условию);

$\angle BNC = \angle DNL$ (как вертикальные);

$\angle NCB = \angle NDL$ (как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей CD).

Из равенства треугольников следует, что $BN = NL$; $BC = DL$. Значит, MN является средней линией треугольника ABL. Согласно свойству средней линии треугольника $MN \parallel AL$.

$AL = BC + AD$.

Следовательно, $MN = 1/2\,AL = 1/2\,(BC + AD)$.

Теорема доказана.

Глава 8
ПЛОЩАДИ ПРОСТЫХ ФИГУР

Простой называется фигура, которую можно разбить на конечное количество треугольников.

Простой фигурой является любой выпуклый плоский многоугольник.

Площадь обозначается буквой S.

Свойства площадей простых фигур

1. У равных фигур площади равны.
2. Площадь фигуры равна сумме площадей всех многоугольников, на которые она разбита.
3. Площадь квадрата равна квадрату его сторон.

Площадь прямоугольника

Теорема: площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Дано:
$ABCD$ — прямоугольник;
$AB = DC = a$;
$BC = AD = b$.
Доказать:
$S_{ABCD} = ab$.

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 101*а*). Выполним дополнительные построения (рис. 101*б*): увеличим стороны $AB = DC = a$ на длину b, а стороны $BC = AD = b$ на длину a. Получился квадрат $KBLM$ со стороной, равной $a + b$.

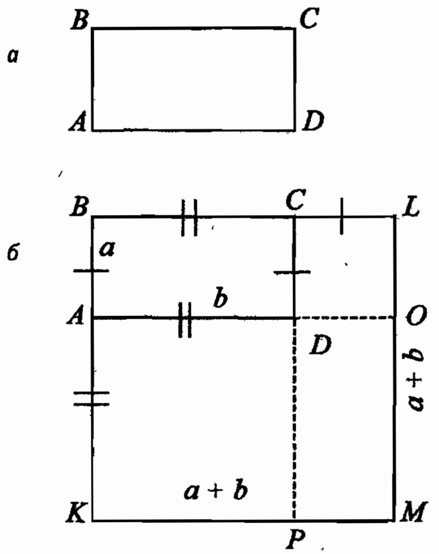


Рис. 101

$S_{KBLM} = (a + b)^2$ — по третьему свойству площадей простых фигур.

$S_{KBLM} = S_{ABCD} + S_{DCLO} + S_{PDOM} + S_{KADP}$ — согласно второму свойству площадей простых фигур.

Прямоугольник $ABCD$ равен прямоугольнику $PDOM$. По первому свойству площадей простых фигур площади S этих прямоугольников равны.

$DCLO$ и $KADP$ — квадраты со стороной a и b соответственно. Следовательно, их площади равны:

$S_{DCLO} = a^2$;

$S_{KADP} = b^2$.

Составляем уравнение:

$(a + b)^2 = S + a^2 + S + b^2$;

$-2S = a^2 + b^2 - (a + b)^2$;

$2S = -a^2 - b^2 + (a^2 + 2ab + b^2)$;

$2S = 2ab$;

$S = ab$.

Таким образом, $S_{ABCD} = ab$.

Теорема доказана.

Площадь параллелограмма

Теорема: площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм;

CM — высота параллелограмма $ABCD$, проведенная к основанию AD.

Доказать:

$S_{ABCD} = AD \times CM$.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 102).

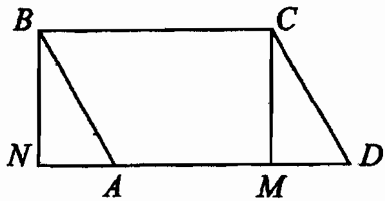


Рис. 102

Проведем высоту BN. Образовался прямоугольник $NBCM$. Его площадь равна:

$S_{NBCM} = BC \times CM$

или:

$S_{NBCM} = AD \times CM$ (т. к. $BC = AD$).

Площадь прямоугольника $NBCM$ также можно записать в следующем виде:

$S_{NBCM} = S_{ABCM} + S_{\Delta NBA}$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$S_{ABCD} = S_{ABCM} + S_{\Delta MCD}$.

$\Delta MCD = \Delta NBA$ — по гипотенузе и острому углу (признак равенства прямоугольных треугольников):

гипотенузы BA и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма;

$\angle NAB = \angle MDC$ — как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD.

Поскольку $\Delta MCD = \Delta NBA$, площадь параллелограмма $ABCD$ можно записать в виде:

$S_{ABCD} = S_{ABCM} + S_{\Delta MCD}$.

Поскольку $S_{ABCM} + S_{\Delta MCD} = S_{NBCM}$, а мы вывели, что $S_{NBCM} = AD \times CM$, то:

$S_{ABCD} = AD \times CM$.

Теорема доказана.

Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника называют *основанием*. При этом высотой треугольника будет называться высота, проведенная к основанию.

Теорема о площади треугольника

Теорема: площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Дано:

ΔABC;

AC — основание;

BD — высота.

Доказать:

$S_{\Delta ABC} = 1/2\, AC \times BD.$

Доказательство:

Выполним дополнительные построения: достроим треугольник ABC до параллелограмма $ANBC$ (рис. 103).

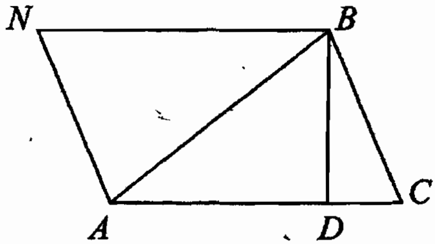


Рис. 103

BD является высотой параллелограмма, проведенной к его основанию AC. Площадь параллелограмма $ANBC$ равна:

$S_{ANBC} = AC \times BD.$

Диагональ AB делит параллелограмм на два треугольника — ΔANB и ΔABC. Площадь параллелограмма $ANBC$ также равна:

$S_{ANBC} = S_{\Delta ANB} + S_{\Delta ABC}.$

Треугольники ANB и ABC равны по третьему признаку равенства треугольников:

AB — общая сторона;

$AN = BC$, $NB = AC$ — как противолежащие стороны параллелограмма $ANBC$.

Из равенства ΔANB и ΔABC следует, что их площади тоже равны. Следовательно, площадь параллелограмма $ANBC$ можно записать следующим образом:

$S_{ANBC} = S_{\Delta ABC} \times 2.$

Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна:

$S_{\Delta ABC} = 1/2\, S_{ANBC}.$

Поскольку $S_{ANBC} = AC \times BD$, то:

$S_{\Delta ABC} = 1/2\, AC \times BD.$

Теорема доказана.

Из теоремы о площади треугольника можно вывести два следствия.

Следствие 1.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2.

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Теорема об отношениях площадей треугольников, имеющих равный угол

Теорема: если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$;

S — площадь ΔABC;

S_1 — площадь $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказать:

$S/S_1 = (AB \times AC)/(A_1B_1 \times A_1C_1).$

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 104*а*). Если их наложить друг на друга так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC — со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно, то получится следующая фигура (рис. 104*б*).

Соединим точку B_1 с C. Образовавшийся треугольник AB_1C имеет общую высоту CM с треугольником ABC. Площади треугольников $ABC(S)$ и $AB_1C(S_2)$ равны:

$S = 1/2\, AB \times CM.$

$S_2 = 1/2\, AB_1 \times CM.$

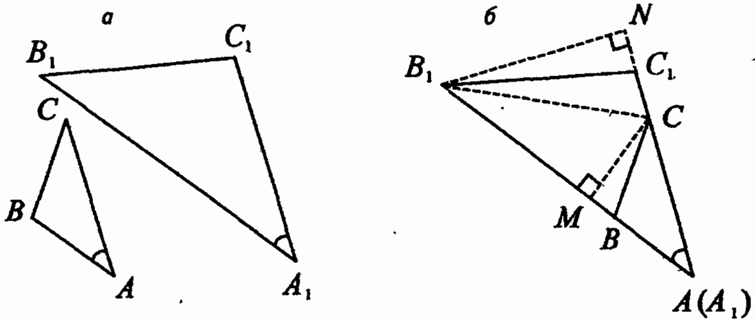


Рис. 104

Отношения площадей этих треугольников соответственно равны:

$S/S_2 = (1/2\,AB \times CM)/(1/2\,AB_1 \times CM)$;

$S/S_2 = AB/AB_1$ (1).

Рассмотрим треугольники AB_1C и AB_1C_1. Они имеют общую высоту B_1N. Соотношение площадей треугольников $AB_1C(S_2)$ и AB_1C_1 (S_1) будет равно:

$S_2/S_1 = AC/AC_1$ (2).

Перемножим равенства (1) и (2), получим:

$(S/S_2) \times (S_2/S_1) = (AB\,/\,AB_1) \times (AC/AC_1)$;

$S/S_1 = (AB \times AC)/(AB_1 \times AC_1)$.

Или:

$S/S_1 = (AB \times AC)/(A_1B_1 \times A_1C_1)$.

Теорема доказана.

Площадь трапеции

Высотой трапеции называют перпендикуляр, который может быть проведен из любой точки одного из ее оснований к прямой, на которой лежит другое основание (рис. 105).

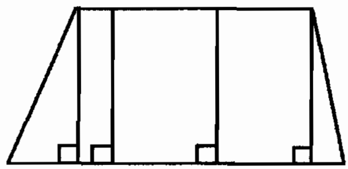


Рис. 105

Теорема: **площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.**

Дано:

$ABCD$ — трапеция;

CM — высота трапеции $ABCD$, проведенная к основанию AD.

Доказать:

$S_{ABCD} = 1/2\,(BC + AD) \times CM$.

Доказательство:

Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 106).

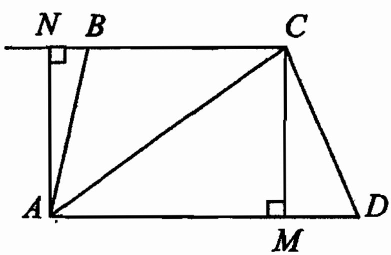


Рис. 106

Проведем диагональ AC. Она разделяет трапецию $ABCD$ на два треугольника: ΔABC и ΔACD. Площадь трапеции соответственно будет равна:

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$;

$S_{\Delta ABC} = 1/2\,BC \times AN$ (AN — высота ΔABC, опущенная к основанию BC);

$S_{\Delta ACD} = 1/2\,AD \times CM$.

Из этих равенств выводим площадь трапеции $ABCD$:
$S_{ABCD} = 1/2\, BC \times AN + 1/2\, AD \times CM$.
$AN = CM$, следовательно:
$S_{ABCD} = 1/2(BC + AD) \times CM$.
Теорема доказана.

Глава 9
ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

Пропорциональные отрезки

AB/BC называют *отношением отрезков*. Это значит, что длина отрезка AB относится к длине отрезка BC.

Если $AB/A_1B_1 = CD/C_1D_1$, то говорят, что отрезки AB и A_1B_1 пропорциональны отрезкам CD и C_1D_1. Пропорциональными может быть и большее количество отрезков.

Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников

Если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные углы равны ($\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$), то стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1 называются *сходственными*.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Подобие обозначается знаком ~, например $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что означает: треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (1);

$AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1 = AC/A_1C_1 = k$ (2).

Число k называют *коэффициентом подобия*. Если одно из равенств (1) или (2) выполняется, треугольники считаются подобными.

Первый признак подобия треугольников

Теорема: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 107).

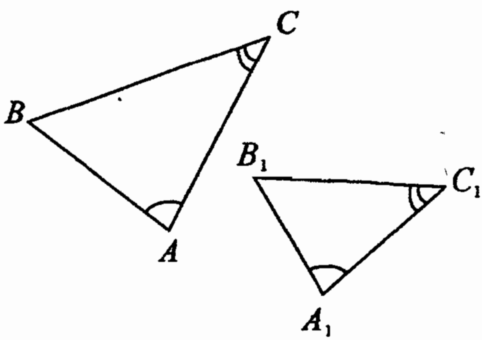


Рис. 107

$\angle C + \angle A + \angle B = 180°$ (по теореме о сумме углов треугольника). Следовательно:

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

Соответственно $\angle C_1$ будет равен:

$\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$.

Поскольку $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (по условию), то $\angle C = \angle C_1$.

Таким образом, все углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$, что соответствует определению подобия треугольников. Следовательно. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Второй признак подобия треугольников

Теорема: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1$;

$\angle B = \angle B_1$.

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 108*а*). У них $\angle B = \angle B_1$ (по условию). Чтобы доказать, что треугольники подобны, достаточно доказать, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (первый признак подобия треугольников).

Выполним дополнительные построения: построим треугольник ABC_2 (рис. 108*б*) таким образом, что $C_2BA = A_1B_1C_1$, а $\angle C_2AB = \angle B_1A_1C_1$.

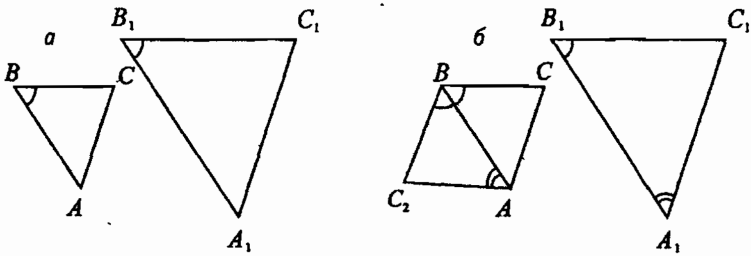


Рис. 108

По первому признаку подобия $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по равенству двух углов). Следовательно, $AB / A_1 B_1 = BC_2 / B_1 C_1$. Поскольку $AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1$ получаем:

$BC_2/B_1C_1 = BC/B_1C_1$.

Из равенства выводим, что $BC_2 = BC$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$ — по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними):

AB — общая сторона;

$BC_2 = BC$ (см. выше);

$\angle ABC = \angle C_2BA$.

Следовательно, $BAC = BAC_2$.

Поскольку $\angle BAC_2 = \angle B_1A_1C_1$, получаем: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Теорема доказана.

Третий признак подобия треугольников

Теорема: если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$AB / A_1B_1 = BC / B_1C_1 = AC / A_1C_1$.

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 109).

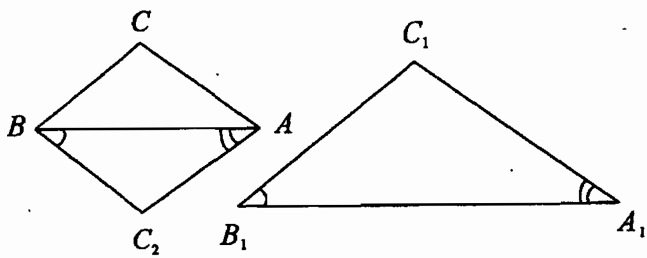


Рис. 109

Чтобы доказать, что треугольники подобны, достаточно доказать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (второй признак подобия треугольников).

Выполним дополнительное построение: построим ΔABC_2, у которого $\angle C_2BA = \angle A_1B_1C_1$, а $\angle C_2AB = \angle B_1A_1C_1$.

Согласно первому признаку подобия треугольников $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по равенству двух соответственных углов треугольников). Из подобия треугольников следует:

$AB/A_1B_1 = BC_2/B_1C_1 = AC_2/A_1C_1$.

Учитывая, что $AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1 = AC/A_1C_1$ — по условию, выводим:

$BC = BC_2$; $AC = AC_2$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$ — по третьему признаку равенства треугольников (по трем сторонам):

AB — общая сторона;

$BC = BC_2$; $AC = AC_2$.

Из равенства треугольников следует, что $\angle ABC = \angle ABC_2$. Поскольку $\angle ABC_2 = \angle A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Площади подобных фигур

Теорема: отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Дано:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;

k — коэффициент подобия;

S — площадь ΔABC;

S_1 — площадь $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказать:

$S_1/S_2 = k^2$.

Доказательство:

По первому признаку подобия треугольников определяем, что:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Отсюда следует, что:

$S/S_1 = (AB \times AC)/(A_1B_1 \times A_1C_1)$ — по теореме об отношениях площадей треугольников, имеющих равный угол.

По третьему признаку подобия треугольников получаем:

$AB/A_1B_1 = k$;

$AC/A_1C_1 = k$.

Следовательно:

$S/S_1 = k \times k = k^2$.

Теорема доказана.

Глава 10
СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Синус, косинус, тангенс

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Синус, косинус и тангенс угла α (где α — градусная мера угла) обозначаются соответственно: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Рассмотрим рисунок 110.

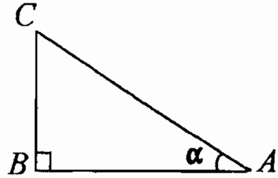


Рис. 110

ΔABC — прямоугольный, $\angle B = 90°$. $\angle A = \alpha$.
$\sin \alpha = BC/AC$ (1);
$\cos \alpha = AB/AC$ (2);
$\operatorname{tg} \alpha = BC/AB$ (3).
Отсюда получаем:

1) катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin \alpha$;

2) катет, прилежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos \alpha$;

3) катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg} \alpha$.

Из формул (1) и (2) можно вывести:
$\sin \alpha/\cos \alpha = (BC/AC)/AB/AC = BC/AB$
Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = BC/AB$, получаем:
$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha/\cos \alpha$

Теорема: косинус угла зависит только от градусной меры угла.

Дано:
ΔABC и $\Delta A'B'C'$ — прямоугольные;
$\angle A = \angle A' = 90°$;
$\angle C = \angle C' = \alpha$.
Доказать:
$A'C'/B'C' = AC/BC$.
Доказательство:

Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ (рис. 111).

Выполним дополнительное построение: отложим на гипотенузе BC отрезок $CD = B'C'$, на стороне AC — отрезок $CK = A'C'$. Образовался ΔKDC.

$\Delta KDC = \Delta A'B'C'$ по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними):
$\angle C = \angle C' = \alpha$ — по условию;
$DC = B'C'$;
$KC = A'C'$.

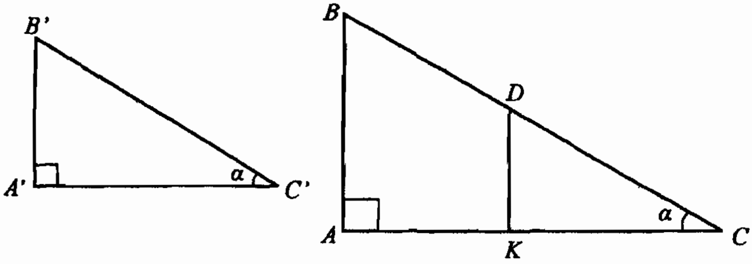


Рис. 111

$\Delta KDC \sim \Delta ABC$ (по первому признаку подобия треугольников (по равенству двух углов):

$\angle C$ — общий;

$\angle K = \angle A = 90°$.

Из подобия треугольников следует:

$KC/AC = DC/BC$.

Отсюда можем вывести следующее равенство:

$AC/BC = KC/DC$.

Поскольку $KC = A'C'$, $DC = B'C'$ по построению, получаем:

$A'C'/B'C' = AC\ /\ BC$.

Теорема доказана.

Теорема: если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы, косинусы и тангенсы этих углов равны.

Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные;

$\angle C = \angle C_1 = 90°$;

$\angle B = \angle B_1$.

Доказать:

$\sin B = \sin B_1$;

$\cos B = \cos B_1$;

$\mathrm{tg}\, B = \mathrm{tg}\, B_1$.

Доказательство:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников:

$\angle C = \angle C_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Из подобия треугольников следует, что:

$AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1 = CA/C_1A_1$.

Из этих равенств можно вывести:

$CA/AB = C_1A_1/A_1B_1$;

$BC/AB = B_1C_1/A_1B_1$;

$C_1A_1/B_1C_1 = CA/BC$.

Следовательно, $\sin B = \sin B_1$, $\cos B = \cos B_1$, $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B_1$.

Теорема доказана.

Теорема Пифагора

Теорема: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Дано:

ΔABC — прямоугольный;

AB и BC — катеты;

AC — гипотенуза;

$\angle B = 90°$.

Доказать:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 112).

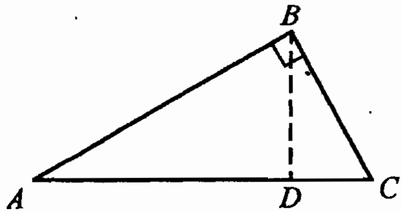


Рис. 112

Проведем высоту BD из вершины B. Косинус угла A равен: $\cos A = AB/AC = AD/AB$.

Из этого равенства выводим:

$AD \times AC = AB^2$.

Косинус угла C равен:

$\cos C = BC/AC = DC/BC$;

$DC \times AC = BC^2$.

Сложим полученные равенства:

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC = AC(AD + DC)$.

Поскольку $AC = AD + DC$, получаем:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Теорема доказана.

Из теоремы Пифагора можно сделать следующие выводы.

1. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

2. Косинус любого острого угла меньше 1.

3. Если к прямой из одной точки провести перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой больше проекция.

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (1);

$1 + \mathrm{tg}^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ (2);

$1 + 1/\mathrm{tg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ (3).

Дано:

ΔABC — прямоугольный;

AB и BC — катеты;

AC — гипотенуза;

$\angle B = 90°$;

$\angle A = \alpha$.

Доказать:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$;
$1 + 1/\operatorname{tg}^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$.
Доказательство:
Рассмотрим ΔABC (рис. 113). По теореме Пифагора:
$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

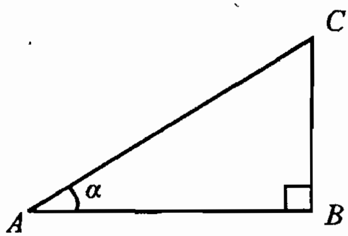


Рис. 113

1. Разделим обе части равенства на AC^2:
$(AB/AC)^2 + (BC/AC)^2 = 1$.
Поскольку:
$AB/AC = \cos\alpha$;
$BC/AC = \sin\alpha$.
Получаем:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (1)
2. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:
$\sin^2\alpha/\cos^2\alpha + 1 = 1/\cos^2\alpha$.
Поскольку:
$\sin\alpha/\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.
Получаем:
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$.
3. Разделим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$. Получим:
$1 + \cos^2\alpha/\sin^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$.
Поскольку:
$\sin\alpha/\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, то $\cos\alpha/\sin\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha$.

Получаем:

$1 + 1/\mathrm{tg}^2\,\alpha = 1/\sin^2\alpha$.

Основные тригонометрические тождества доказаны.

Значение синуса, косинуса и тангенса для разных углов

Теорема: для любого острого угла α ($0° \le \alpha \le 90°$) справедливы следующие равенства:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ (1);

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ (2).

Дано:

ΔABC — прямоугольный;

AB и BC — катеты;

AC — гипотенуза;

$\angle B = 90°$;

$\angle A = \alpha$.

Доказать:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC (рис. 114).

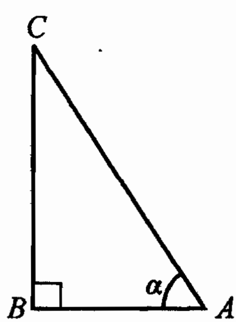


Рис. 114

Поскольку $\angle A = \alpha$, то $\angle C = 90° - \alpha$.

Поскольку $\sin \alpha = BC/AC$, а $\cos \alpha = AB/AC$ — по определению, то выводим:

$\cos (90° - \alpha) = BC/AC$;

$\sin (90° - \alpha) = AB/AC$.

Подставляем в эти формулы значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, получаем:

$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$;

$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$.

Теорема доказана.

$\sin 0° = 0$; $\cos 0° = 1$; $\text{tg } 0° = 0$;

$\sin 90° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\text{tg } 90°$ — не определен;

$\sin 180° = 0$; $\cos 180° = - 1$; $\text{tg } 180° = 0$.

Синус, косинус и тангенс угла 45°

Дано:

ΔABC — прямоугольный;

AC и BC — катеты;

AB — гипотенуза;

$\angle C = 90°$;

$\angle A = 45°$.

Найти:

$\sin A$, $\cos A$, $\text{tg } A$.

Решение:

Рассмотрим ΔABC (рис. 115).

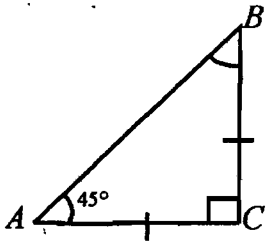


Рис. 115

$\angle A = 45°$, значит, $\angle B = 90° - 45° = 45°$. Следовательно, ΔABC — равнобедренный, $AC = BC$.

Пусть $AC = BC = a$. Тогда по теореме Пифагора гипотенуза AB будет равна:

$AB^2 = a^2 + a^2$;

$AB = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2}$.

Подставляем значения катетов в формулы, определяющие синус, косинус и тангенс угла. Получаем:

$\sin A = BC/AB = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$;

$\cos A = AC/AB = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$;

$\mathrm{tg}\, A = BC/AC = a/a = 1$.

Задача решена.

Итак,

$\sin 45° = \sqrt{2}/2$;

$\cos 45° = \sqrt{2}/2$;

$\mathrm{tg}\, 45° = 1$.

Синус, косинус и тангенс угла 30° и 60°

Дано:

ΔABC — равносторонний;

BD — медиана;

$\angle ABD = \alpha$.

Найти:

$\sin A$, $\cos A$, $\mathrm{tg}\, A$;

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha$.

Решение:

Рассмотрим $\angle ABC$ (рис. 116).

Этот треугольник равносторонний, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, а BD является не только медианой, но также биссектрисой и высотой треугольника ABC. Значит, $\alpha = 30°$.

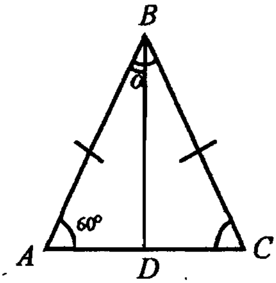


Рис. 116

1. Пусть $AB = BC = CA = a$. Тогда $AD = DC = 1/2\,a$.
По теореме Пифагора:

$$BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{(a^2 - (a/2)^2)} = \sqrt{((4a^2 - a^2)/4)} =$$
$$= a\sqrt{3}/2.$$

Отсюда выводим, что:
$\sin \alpha = (a/2)/a = 1/2,$
$\cos \alpha = (a\sqrt{3}/2)/a = \sqrt{3}/2,$
$\mathrm{tg}\, \alpha = (1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}$

2. Поскольку:
$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha;$
$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha.$
Отсюда находим:
$\sin A = \sin 60° = \cos (90° - 60°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2;$
$\cos A = \cos 60° = \sin (90° - 60°) = \sin 30° = 1/2;$
$\mathrm{tg}\, A = \sin A/\cos A = (\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}.$
Задача решена.
Итак,
$\sin 30° = 1/2;$
$\cos 30° = \sqrt{3}/2;$

$\operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$;

$\sin 60° = \sqrt{3}/2$;

$\cos 60° = 1/2$;

$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

Сводная таблица значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

Изменение $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ при возрастании угла α

Теорема: при возрастании острого угла $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ возрастают, а $\cos \alpha$ убывает.

Дано:

AB — полупрямая;

$\angle BAC = \alpha$;

$\angle BAD = \beta$;

$\alpha < \beta$.

Доказать:

при возрастании угла синус и тангенс возрастают, а косинус убывает.

Доказательство:

Проведем через т. B полупрямой AB прямую перпендикулярную AB. Она пересечет стороны углов BAC и BAD в точках C и D (рис. 117).

Точка C находится между точками B и D, поскольку $\alpha < \beta$. Следовательно, $BC < BD$. По свойству наклонных, проведенных из одной точки к прямой, выводим, что $AC < AD$.

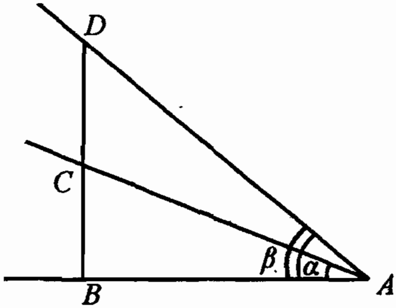


Рис. 117

$\cos \alpha = AB/AC$;

$\cos \beta = AB/AD$.

Поскольку $AC < AD$, то $\cos \beta < \cos \alpha$. Это значит, что при возрастании угла косинус убывает.

$\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$. Из этой формулы следует, что при убывании косинуса синус возрастает, и наоборот.

$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Из этой формулы следует, что при возрастании синуса и убывании косинуса тангенс будет возрастать.

Таким образом, при возрастании угла синус и тангенс возрастают, а косинус убывает.

Теорема доказана.

Глава 11
ВЕКТОРЫ

Понятие вектора

Вектором называется отрезок имеющий направление, т. е. один из его концов является началом, а другой — концом.

Понятие вектора используют для описания таких физических величин, как скорость, сила, движение и т. п. Такие величины имеют не только числовое значение, но и направление в пространстве. Физические величины, имеющие направление, называются *векторными величинами*.

На рисунке отрезок изображают отрезком со стрелкой (рис. 118): точка A является началом отрезка AB, точка B — концом. Стрелка показывает, что отрезок AB направлен от начала к концу.

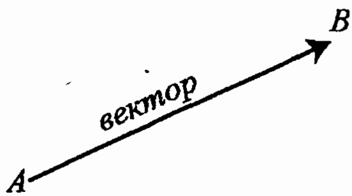


Рис. 118

Для обозначения вектора над его буквенным обозначением ставится стрелка или черточка:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MF}$;

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MF}$.

Векторы также могут обозначаться строчными латинскими буквами со стрелкой или черточкой наверху:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Любая точка плоскости тоже является вектором. В этом случае считается, что вектор имеет нулевое значение, или его называют *нулевым вектором*. Начало нулевого вектора совпадает с его концом.

Длина вектора равна длине отрезка. Длину вектора еще называют его *модулем*, или абсолютной величиной. Длина вектора обозначается:

$|\overrightarrow{AB}|$ или $|\overrightarrow{ab}|$ ($|\overline{AB}|$ или $|\overline{ab}|$).

Длина нулевого вектора равна нулю:

$|\overrightarrow{M}| = 0$ ($|\overline{M}| = 0$).

Равенство векторов

Ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными* (рис. 119).

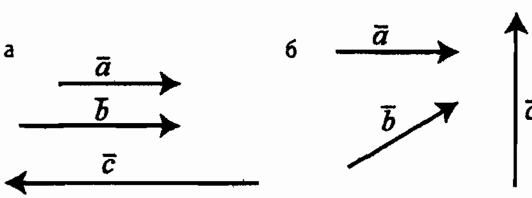


Рис. 119

Нулевой вектор является коллинеарным ко всем векторам.

Два коллинеарных ненулевых вектора могут быть направлены одинаково либо противоположно. Они соответственно называются *сонаправленными* либо *противоположно направленными*.

Сонаправленные векторы обозначаются:

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$.

Противоположно направленные векторы обозначаются:

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$.

Нулевой вектор не имеет направления, поэтому его считают сонаправленным всем векторам.

Равными называют сонаправленные векторы, длины которых равны.

Свойство векторов

От любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и притом только один.

Сложение векторов

Правило треугольника

Правилом треугольника называется правило сложения векторов:

Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Если от произвольной точки A отложить вектор $\overline{AB}$ равный вектору $\bar{a}$, затем от точки B отложить вектор $\overline{BC}$ равный вектору $\bar{b}$, то вектор $\overline{AC}$ будет равен сумме векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 120).

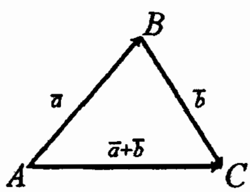


Рис. 120

Законы сложения векторов

Теорема: для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ справедливы равенства:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (переместительный закон);

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (сочетательный закон)

Дано:

векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Доказать:

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

Доказательство:

1. Выполним дополнительные построения: от произвольной точки A отложим векторы:

$\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{AD} = \bar{b}$.

Далее построим на этих точках параллелограмм $ABCD$ (рис. 121).

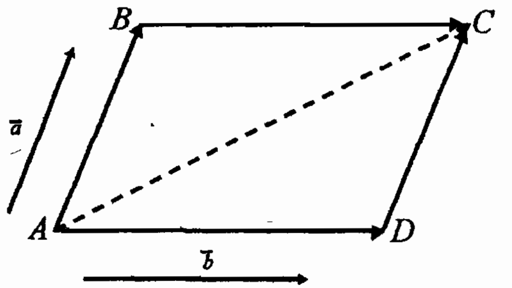


Рис. 121

Рассмотрим треугольник ABC. По правилу треугольника находим сторону AC:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{a} + \bar{b}$.

Из треугольника ACD следует:

$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \bar{b} + \bar{a}$.

Из этих формул выводим, что:

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

2. Выполним дополнительные построения:

1) отложим от произвольной точки A вектор: $\overline{AB} = \overline{a}$;

2) отложим от произвольной точки B вектор: $\overline{BC} = \overline{b}$;

3) отложим от произвольной точки C вектор: $\overline{CD} = \overline{c}$.

Получим четырехугольник $ABCD$ (рис. 122).

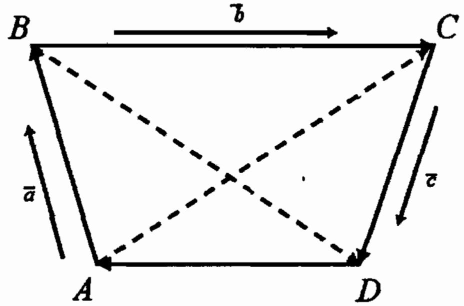


Рис. 122

По правилам треугольников выводим:

$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$;

$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$.

Из этих равенств получаем:

$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

Теорема доказана.

Переместительный закон сложения векторов называют также *правилом параллелограмма*.

Сумма нескольких векторов

Несколько векторов складывают последовательно. Сначала складывают два вектора, затем их сумму складывают с третьим вектором, и т. д. Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они были складываемы (рис. 123).

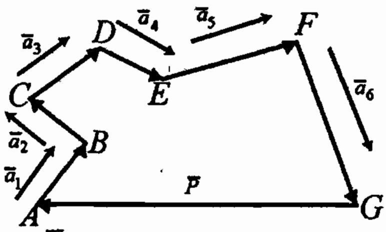


Рис. 123

Правило многоугольника.

Пусть A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки плоскости. Для них справедливо равенство:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}.$$

Эту формулу называют *правилом многоугольника*. Оно справедливо для любых точек, даже для тех, которые совпадают (рис. 124).

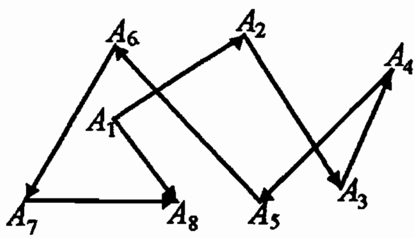
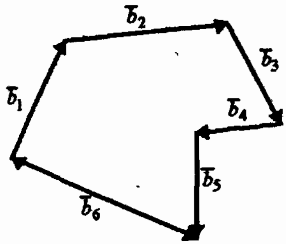


Рис. 124

Если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, сумма всех векторов будет равна нулевому вектору (рис. 125).



$$\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4+\bar{b}_5+\bar{b}_6=0$$

Рис. 125

Вычитание векторов

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является вектор, сумма которого с вектором $\bar{b}$ равна вектору $\bar{a}$. Разность векторов обозначается так: $\bar{a} - \bar{b}$.

$(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{b} = \bar{a}$

Теорема: для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливо равенство:

$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

Дано:

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Доказать:

$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Доказательство:

Согласно определению разности векторов:

$(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{b} = \bar{a}$.

Прибавим к обеим частям равенства вектор $(-\bar{b})$:

$(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{b} + (-\bar{b}) = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Получим:

$(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Теорема доказана.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на число k называется такой вектор $\bar{b}$, длина которого равна: $|k| \times |\bar{a}|$, при этом векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

Произведение вектора на число обозначается: $k\bar{a}$.

1. Произведением нулевого вектора на число всегда будет нулевой вектор.

2. Произведением любого вектора на число нуль будет нулевой вектор.

3. Для любого числа k векторы $\bar{a}$ и $k\bar{a}$ коллинеарны.

Свойства умножения вектора на число

Для любых чисел k, l и любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ справедливы равенства:

1) $(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$ — сочетательный закон;

2) $(k + l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$ — первый распределительный закон;

3) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ — второй распределительный закон.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема 1: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, $\bar{a} \neq 0$, то существует такое число k, что $\bar{b} = k\bar{a}$.

Дано:

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны;

$\bar{a} \neq 0$;

k — число.

Доказать:

$\bar{b} = k\bar{a}$.

Доказательство:

1. $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$.

Пусть $k = |\bar{a}|/|\bar{b}|$, тогда $k \geq 0$. Следовательно:

1) $k\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ (рис. 126*а*);

2) $|k\bar{a}| = |k| \times |\bar{a}| = (|\bar{b}|/|\bar{a}|) \times |\bar{a}| = |\bar{b}|$.

Итак, $\bar{b} = k\bar{a}$.

2. $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$.

Пусть $k = -(|\bar{b}|/|\bar{a}|)$, тогда $k < 0$. Следовательно:

1) $k\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ (рис. 126*б*);

2) $|k\bar{a}| = |k| \times |\bar{a}| = (|\bar{b}|/|\bar{a}|) \times |\bar{a}| = |\bar{b}|$.

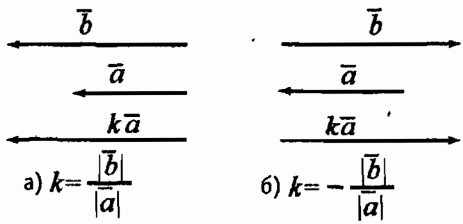


Рис. 126

Итак, $\bar{b} = k\bar{a}$.

Теорема доказана.

Теорема 2: любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Дано:

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — неколлинеарны;

вектор $\bar{p}$.

Доказать:

вектор $\bar{p}$ разложен на вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е.:

1) $\bar{p} = x\bar{a} + y\bar{b}$ (где x, y — коэффициенты разложения векторов);

2) коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

Доказательство:

1. Докажем, что:

$\bar{p} = x\bar{a} + y\bar{b}$.

1) пусть вектор $\bar{p}$ коллинеарен вектору $\bar{b}$.

Тогда по теореме о коллинеарных векторах: $\bar{p} = y\bar{b}$.

Эту формулу можно представить в виде:

$\bar{p} = 0 \times \bar{a} + y \times \bar{b}$.

Это значит, что вектор $\bar{p}$ разложен по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) пусть вектор $\bar{p}$ не коллинеарен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Выполним дополнительные построения: отметим точку O. От нее отложим вектор $\overline{OA}$ равный $\bar{a}$, вектор $\overline{OB}$ равный $\bar{b}$ и вектор $\overline{OP}$ равный $\bar{p}$ (рис. 127).

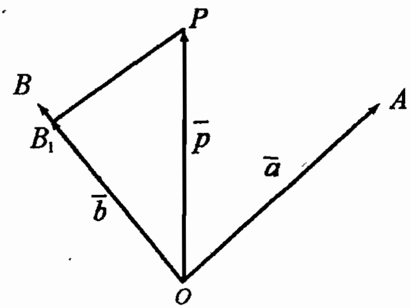


Рис. 127

Проведем из точки P прямую, параллельную прямой OA. Эта прямая пересечет прямую OB в точке B_1.

По правилу треугольника получим:

$\bar{p} = \overline{OB_1} + \overline{B_1P}$.

Векторы и коллинеарны, следовательно, векторы $\overline{OB_1}$ и $\overline{B_1P}$ тоже коллинеарны. Значит, существуют такие числа x и y, при которых выполняются условия:

$\overline{B_1P} = x\bar{a}$, $\overline{OB_1} = y\bar{a}$.

5. Зак. 258

Отсюда можно вывести:

$\overline{p} = \overline{xa} + \overline{yb}.$

Это значит, что вектор $\overline{p}$ разложен по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Докажем, что коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

Допустим, что возможны два разложения векторов:

$\overline{p} = \overline{xa} + \overline{yb}$; (1)

$\overline{p} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b}$. (2)

Вычтем из первого равенства второе. Получим:

$\overline{0} = (x - x_1)\overline{a} + (y - y_1)\overline{b}.$

Это равенство выполняется только при условии, что:

$x - x_1 = 0$ и $y - y_1 = 0$.

Если $x - x_1 = 0$ или $y - y_1 = 0$, тогда:

$a = -[(x - x_1)/(y - y_1)] \times b.$

Это означает, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, что противоречит условию. Следовательно, второе разложение векторов невозможно.

Таким образом, коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

Теорема доказана.

Глава 12
МЕТОД КООРДИНАТ

Метод координат — это изучение свойств геометрических фигур с помощью уравнений и неравенств путем введения системы координат.

Осями координат называют две прямые на плоскости, взаимно перпендикулярные. Их называют *прямыми* x и y, а точку их пересечения — *точкой* O (рис. 128).

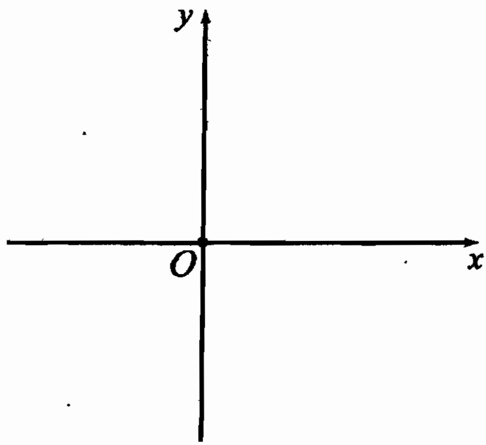


Рис. 128

Прямая x называется *осью абсцисс*, а прямая y — *осью ординат*. Точка O называется *началом координат*. Она разбивает каждую ось координат на две полуоси. Одна из полуосей каждой прямой словно называется *положительной*, а другая — *отрицательной* (рис. 129).

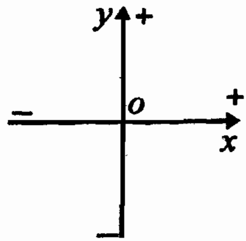


Рис. 129

Любая точка плоскости имеет координаты — абсциссу и ординату.

Координаты точки обозначаются: $A\,(x;\ y)$, где x соответствует числу x_1, абсолютная величина которого равна расстоянию от начала координат до точки пересечения прямой параллельной оси ординат с осью абсцисс; y соответственно обозначает число y_1, равное значению оси ординат в точке пересечения в ней прямой параллельной оси абсцисс (рис. 130).

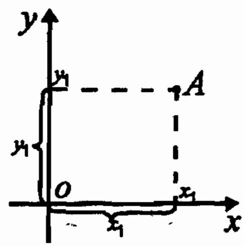


Рис. 130

Все точки, расположенные на оси абсцисс x, имеют нулевую ординату ($y = 0$). Также все точки, расположенные на оси ординат y, имеют нулевую абсциссу ($x = 0$).

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, называемые четвертями и обозначающиеся римскими цифрами: I, II, III, IV (рис. 131).

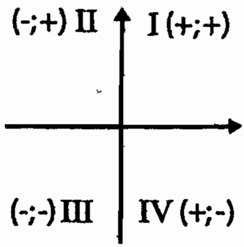


Рис. 131

В пределах каждой четверти обе координаты имеют свой знак. Плоскость, в которой проведены оси координат, называют *плоскостью xy*.

Координаты на плоскости x и y называют *декартовыми*.

Координаты середины отрезка

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Дано:

Отрезок AB;

координаты концов отрезка AB: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$;

точка C — середина отрезка AB.

Найти:

координаты точки C $(x; y)$.

Решение:

1. Отрезок AB не параллелен осям x и y, следовательно, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ (рис. 132).

Проведем через точки A, B и C прямые, параллельные оси ординат. Эти прямые пересекут ось абсцисс в точках $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$, $C_1(x_3; 0)$.

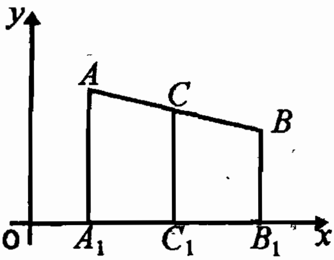


Рис. 132

По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1, т. е. $A_1C_1 = C_1B_1$. Следовательно, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Это равенство имеет два решения:

1) $x - x_1 = x - x_2$.

Получаем: $x_1 = x_2$, но это невозможно, т. к. по условию $x_1 \neq x_2$;

2) $x - x_1 = -(x - x_1)$.

Получаем формулу абсциссы точки C: $x = (x_1 + x_2)/2$.

Аналогично находим формулу ординаты точки C: $y = (y_1 + y_2)/2$.

2. Отрезок AB параллелен оси y, следовательно, $x_1 = x_2 = x$.

3. Отрезок AB параллелен оси x, следовательно, $y_1 = y_2 = y$.

Расстояние между точками

Дано:

точка $A(x_1; y_1)$;

точка $B(x_2; y_2)$.

Найти:

расстояние между точками A и B.

Решение:

1. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$

Проведем через точки A и B прямые, параллельные осям координат (рис. 133). Точка C — точка пересечения прямых AC и BC.

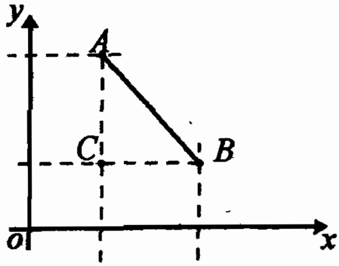


Рис. 133

Расстояние между точками A и C равно: $|y_1 - y_2|$. Расстояние между точками B и C равно: $|x_1 - x_2|$.

Треугольник ABC — прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$;

$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$;

2. $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$;

$AB = y_1 - y_2$;

3. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$;

$AB = x_1 - x_2$;

4. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$;

$AB = 0$.

Уравнение линии на плоскости

Уравнением линии L называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой другой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение окружности

Уравнением фигуры на плоскости является уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры.

Любая окружность с центром в точке A (a; b) и радиусом r (рис. 134) имеет уравнение следующего вида:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

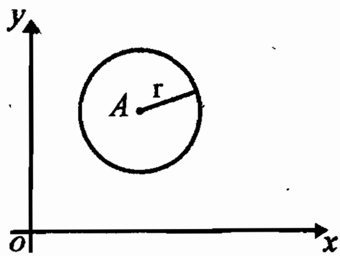


Рис. 134

Если центр окружности совпадает с началом координат, тогда уравнение принимает следующий вид:

$x^2 + y^2 = r^2$.

Уравнение прямой

Любая прямая в декартовых координатах x; y имеет уравнение следующего вида:

$ax + by + c = 0$.

1. $a = 0$, $b \neq 0$ (рис. 135a).

Уравнение прямой примет следующий вид:

$y = -c/b$ (1).

Это означает, что все точки прямой имеют одну ординату ($-c/b$), т. е. прямая параллельна оси x. Если $c = 0$, прямая совпадает с осью x.

2. $a \neq 0$, $b = 0$ **(рис. 135*б*).**

Уравнение прямой примет следующий вид:

$x = -c/a$ (2).

Это означает, что все точки прямой имеют одну абсциссу $(-c/a)$, т. е. прямая параллельна оси y. Если $c = 0$, прямая совпадает с осью y.

3. Уравнение прямой:

$c = 0$ (3).

Это значит: $x = 0$, $y = 0$. Прямая проходит через начало координат (рис. 135*в*), т. к. координаты точки O (0; 0) удовлетворяют этому уравнению.

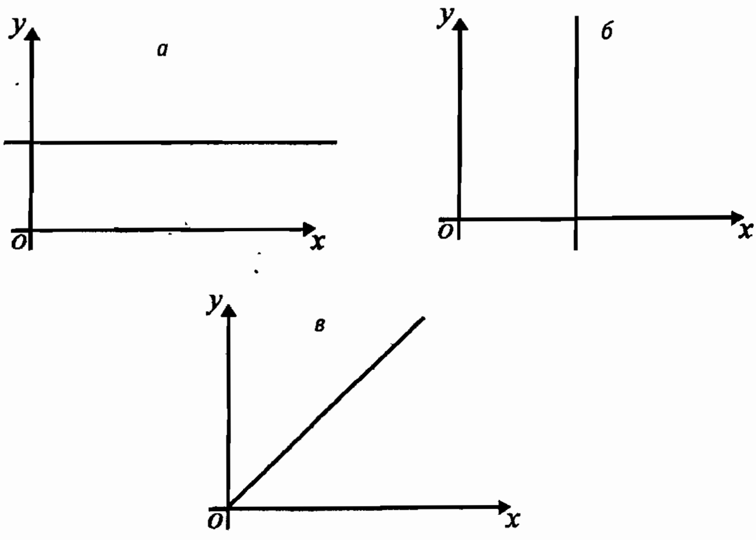


Рис. 135

Угловой коэффициент прямой

Пусть в уравнении прямой $ax + by + c = 0$ $y \neq 0$. Тогда уравнение можно представить в следующем виде:

$y = -ax/b$.

Обозначим $(-a/b) = k$, $(-c/b) = q$, тогда уравнение примет вид:

$y = kx + q$ (4).

Дано:

т. $A\ (x;\ y)$, т. $B\ (x_1;\ y_1)$;

$x < x_1$.

Найти:

k — ?

Решение:

Подставим координаты точек A и B в уравнение прямой (4), получим:

$y = kx + q$;

$y_1 = kx_1 + q$.

Вычтем эти равенства почленно:

$y_1 - y = kx_1 + q - (kx + q) = k(x_1 - x)$.

Отсюда выводим:

$k = (y_1 - y)/(x_1 - x)$.

1. При $y < y_1$ (рис. 136*а*): $k = (y_1 - y)/(x_1 - x) = \operatorname{tg} \alpha$.
2. При $y_1 < y$ (рис. 136*б*): $k = (y_1 - y)/(x_1 - x) = -\operatorname{tg} \alpha$.

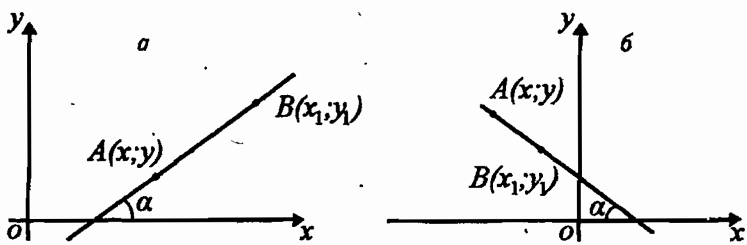


Рис. 136

Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + q$ называется *угловым коэффициентом*. Он равен (с точностью до знака) тангенсу острого угла, который образует данная прямая с осью x.

Пересечение прямой и окружности

В зависимости от взаимного расположения окружности и прямой они могут иметь несколько общих точек, а также одну или ни одной общей точки.

Если прямая проходит через центр окружности, она пересекает окружность в точках, являющихся концами диаметра окружности.

Прямая не проходит через центр окружности. Пусть центр окружности совпадает с началом координат, в которой ось *Ox* перпендикулярна данной прямой (рис. 137).

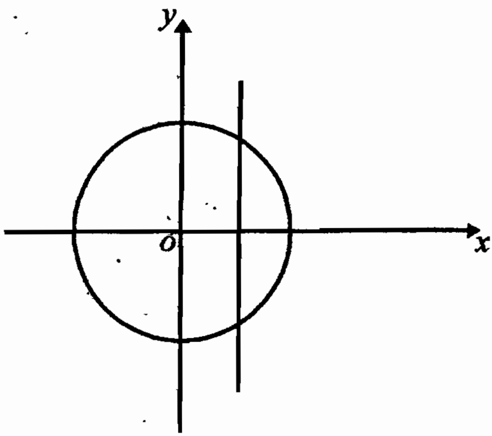


Рис. 137

Тогда уравнение окружности можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r — радиус данной окружности.

Уравнение данной прямой будет иметь вид:

$$x = b.$$

Решением этих двух уравнений являются координаты точки пересечения заданных прямой и окружности:

$$x = b;\ y = \pm\sqrt{(r^2 - b^2)}.$$

В зависимости от соотношения между b и r возможны 3 варианта.

1. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($b < r$), то система уравнений имеет два решения. Это значит, что прямая и окружность имеют две общие точки (рис. 138*а*), а данная прямая является секущей к окружности.

2. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности ($b = r$), то прямая и окружность имеют только одну общую точку (рис. 138*б*). Данная прямая является касательной к окружности.

3. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности ($b > r$), то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 138*в*). Значит, прямая и окружность не пересекаются.

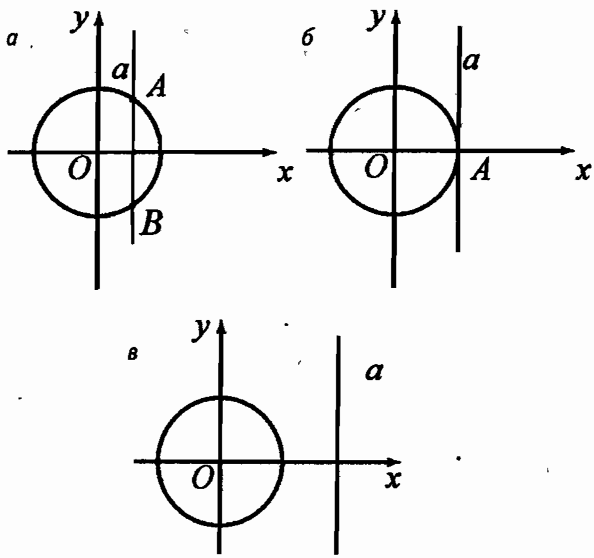


Рис. 138

Координаты вектора

Координатами вектора являются коэффициенты его разложения по двум координатным векторам в данной системе координат:

$$\overline{p} = x\overline{a} + y\overline{b},$$

где x и y — координаты вектора.

Координаты вектора пишут в фигурных скобках: $\overline{p}\{x; y\}$.

Нулевой вектор можно представить в виде: $\overline{0} = 0 \times \overline{a} + 0 \times \overline{b}$, т. е. его координаты равны: $\overline{0}\{0; 0\}$.

Если $\overline{a} = \overline{b}$, то $x_1\overline{a} + y_1\overline{b} = x_2\overline{a} + y_2\overline{b}$. Отсюда следует: $x_1 = x_1$, $y_1 = y_2$. Значит, *координаты равных векторов соответственно равны.* И обратно: *если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.*

Правила нахождения координат суммы, разности и произведения двух и более векторов по координатам этих векторов

Правило 1: каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Дано:

векторы $\overline{a}\{x_1; y_1\}$ и $\overline{b}\{x_2; y_2\}$;

вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Доказать:

координаты вектора $\overline{c}$ равны: $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Доказательство:

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно разложить по векторам:

$\overline{a} = x_1\overline{m} + y_1\overline{n}$;

$\overline{b} = x_2\overline{m} + y_2\overline{n}$.

Сложив векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, получим:

$\overline{c} = x_1\overline{m} + y_1\overline{n} + x_2\overline{m} + y_2\overline{n} = (x_1 + x_2)\overline{m} + (y_1 + y_2)\overline{n}$.

Таким образом, координаты вектора $\overline{c}$ равны: $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Правило 1 доказано.

Правило 2: каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Дано:

векторы $\overline{a}\{x_1; y_1\}$ и $\overline{b}\{x_2; y_2\}$;

вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$.

Доказать:

координаты вектора $\overline{c}$ равны: $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

Доказательство:

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно разложить по векторам:

$\overline{a} = x_1\overline{m} + y_1\overline{n}$;

$\overline{b} = x_2\overline{m} + y_2\overline{n}$.

Вычтем из вектора вектор, получим:

$\overline{c} = x_1\overline{m} + y_1\overline{n} - x_2\overline{m} - y_2\overline{n} = (x_1 - x_2)\overline{m} + (y_1 - y_2)\overline{n}$.

Таким образом, координаты вектора $\overline{c}$ равны: $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

Правило 2 доказано.

Правило 3: каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Дано:

вектор $\overline{a}\{x; y\}$;

k — произвольное число.

Доказать:

координаты вектора $k\overline{a}$ равны: $\{kx; ky\}$.

Доказательство:

Вектор $\overline{a}$ можно разложить по векторам:

$\overline{a} = x\overline{m} + y\overline{n}$.

Умножим это уравнение на k, получим:

$k\bar{a} = kx\bar{m} + ky\bar{n}$.

Таким образом, координаты вектора $k\bar{a}$ равны: $\{kx; ky\}$.

Правило 3 доказано.

Из правила умножения вектора на число следует:

1) для любого вектора $\bar{a}$ и чисел m и n справедливо равенство:

$(m + n)\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a}$;

2) для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа k справедливо равенство:

$k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$.

Теорема: у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны.

Дано:

$\bar{a}\{x_1; y_1\}$ и $\bar{b}\{x_2; y_2\}$ — коллинеарные векторы.

Доказать:

$x_1/x_2 = y_1/y_2$.

Доказательство:

1. $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$.

Пусть $(|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times \bar{b} = \bar{c}$.

Векторы a и c одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину, следовательно, они равны, соответственно равны и их координаты:

$x_1 = (|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times x_2$;

$y_1 = (|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times y_2$.

Их этих равенств получаем:

$x_2/x_1 = |\bar{b}|/|\bar{a}|$;

$y_2/y_1 = |\bar{b}|/|\bar{a}|$.

Следовательно, $x_2/x_1 = y_2/y_1$.

2. $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$.

Пусть вектор = — $(|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times \bar{b}$.

Векторы a и c противоположно направлены, но имеют одну и ту же абсолютную величину, следовательно, они равны, соответственно равны и их координаты:

$x_1 = -(|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times x_2$;

$y_1 = -(|\bar{a}|/|\bar{b}|) \times y_2$.

Их этих равенств получаем:

$x_2/x_1 = -(|\bar{b}|/|\bar{a}|)$;

$y_2/y_1 = -(|\bar{b}|/|\bar{a}|)$.

Следовательно: $x_2/x_1 = y_2/y_1$.

Теорема доказана.

Обратная теорема: если у двух ненулевых векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Дано:

векторы $\bar{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;\ y_2\}$;

$x_2/x_1 = y_2/y_1$.

Доказать:

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны.

Доказательство:

Пусть $x_2/x_1 = y_2/y_1 = \lambda$, тогда:

$x_2 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda y_1$.

Из этих равенств следует, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. Это значит, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны.

Теорема доказана.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;\ y_2\}$ называют число равное: $x_1x_2 + y_1y_2$.

Для любых векторов $\bar{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\bar{b}\{x_2;\ y_2\}$ и $\bar{c}\{x_3;\ y_3\}$ справедливы равенства:

$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$;

$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3$;

$\bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c} = x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ является $\angle BAC$.

Углом между любыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является угол между равными им векторами, имеющими общее начало.

Угол между одинаково направленными векторами равен нулю.

Теорема: скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

Дано:

векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

β — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Доказать:

$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\beta$.

Доказательство:

Пусть координаты вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}|$ и 0 (рис. 139), тогда координаты вектора $\bar{b}$ будут: $|\bar{b}|\cos\beta$ и $|\bar{b}|\sin\beta$.

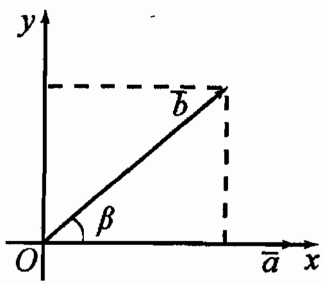


Рис. 139

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно выразить следующим образом:

$$\overline{ab} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\beta + 0 \times |\overline{b}| \sin\beta = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\beta$$

Теорема доказана.

Из теоремы вытекают следующие выводы.

1. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

2. Если угол между векторами меньше 90°, их скалярное произведение больше 0.

3. Если угол между векторами больше 90°, их скалярное произведение меньше 0.

4. Если векторы одинаково направлены, их скалярное произведение равно:

$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \times |\overline{b}|$.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$\overline{a}\,\overline{a} = |\overline{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора. Его также обозначают $\overline{a}^2$.

6. Косинус угла β между ненулевыми векторами $\overline{a}\{x_1;\ y_1\}$ $\overline{b}\{x_2;\ y_2\}$ определяется по формуле:

$$\cos\beta = (x_1x_2 + y_1y_2)/(\sqrt{(x_1^2 - y_1^2)} \times \sqrt{(x_2^2 - y_2^2)}).$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и любого числа k справедливы следующие соотношения:

1) $\overline{a}^2 \geq 0$, причем $\overline{a}^2 > 0$ при $a \neq 0$;

2) $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{b} \times \overline{a}$ (переместительный закон);

3) $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ (распределительный закон, справедлив для любого числа слагаемых);

4) $(k\overline{a})\overline{b} = k(\overline{a} \times \overline{b})$ (сочетательный закон).

Глава 13
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ЛЮБОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Синус, косинус и тангенс любого угла

Построим в первом и втором квадрантах прямоугольной системы координат Oxy единичную полуокружность с радиусом 1 и центром в начале координат. Поведем луч a с началом в т. O, пересекающий единичную полуокружность в т. M с координатами $(x; y)$. Между положительной осью абсцисс и лучом a образовался угол α.

1. Если луч a совпадает с осью x, значит, угол $\alpha = 0$.

2. Если угол α острый, тогда построим прямоугольный треугольник OMN, у которого сторона $ON = x$, а сторона $MN = y$ (рис. 140).

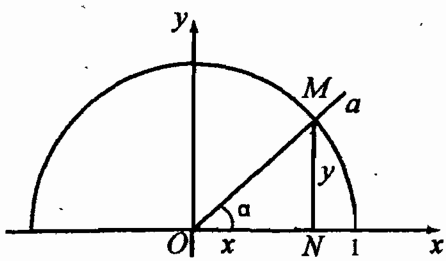


Рис. 140

Находим синус и косинус угла α:

$\sin\alpha = MN/OM$;

$\cos\alpha = ON/OM$.

Поскольку $OM = 1$, $MN = y$, $ON = x$, получаем:

$\sin\alpha = y$;

$\cos\alpha = x$.

Таким образом, синус острого угла α равен ординате y точки M, а косинус — абсциссе x точки M.

3. Если угол α прямой, тупой или развернутый (рис. 141), синус и косинус угла тоже определяется по формулам: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$.

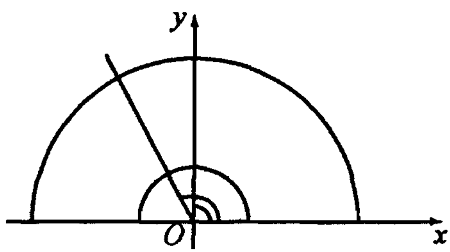


Рис. 141

Получаем: для любого угла α из промежутка $0° \le \alpha \le 180°$ синусом является ордината y точки M, а косинусом — абсцисса x точки M.

Поскольку дана единичная полуокружность, координаты ее точек (x; y) заключены в промежуток:

$0 \le y \le 1$; $-1 \le x \le 1$.

Тогда для любого угла α из промежутка $0° \le \alpha \le 180°$ будут справедливы неравенства:

$0 \le \sin\alpha \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Теорема: для любого угла α ($0° \le \alpha \le 180°$) справедливы следующие равенства:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Для любого угла α ($\alpha \neq 90°$) справедливо равенство:

$\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Дано:

т. $A(x;\ y)$ и т. $A_1(x_1;\ y_1)$;

т. $B(x;\ 0)$ и т. $B_1(x_1;\ 0)$;

$\angle AOB = \angle A_1O\,B_1 = \alpha$;

$AO = A_1O$.

Доказать:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABO и $\Delta A_1B_1O_1$ (рис. 142).

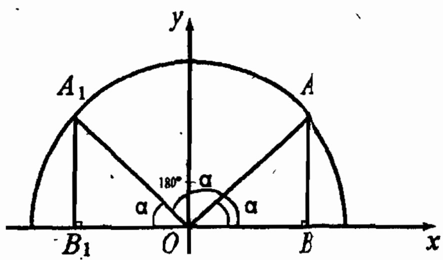


Рис. 142

Они прямоугольные — $\angle B = \angle B_1 = 90°$ и равны по острому углу и гипотенузе. Из равенства треугольников выводим:

$AB = A_1B_1$, или $y = y_1$;

$BO = B_1O$, или $x = x_1$.

Следовательно:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Теорема доказана.

Формула вычисления координат любой точки

Дано:

Oxy — система координат;

точка $A(x; y)$, где $y > 0$.

Найти:

x, y.

Решение:

Соединим точки O и A (рис. 143). Образовался угол между лучом OA и осью x, равный α.

$x = OA \cos \alpha$;

$y = OA \sin \alpha$.

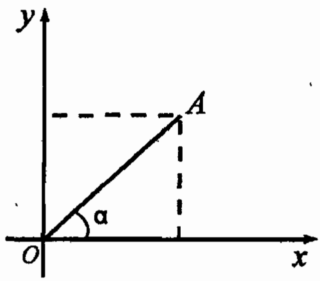


Рис. 143

Площадь треугольника

Теорема: площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$BC = b$;

S — площадь ΔABC.

Доказать:

$S = 1/2\, ab \sin B$.

Доказательство:

Введем систему координат с началом в точке B (рис. 144).

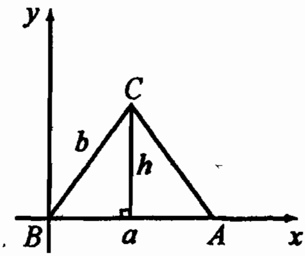


Рис. 144

При этом точка A должна лежать на положительной оси Bx, а точка C должна иметь положительную ординату.

Площадь ΔABC (S) определяется по формуле:

$S = 1/2\ ah$ (h — высота треугольника ABC).

h равна ординате точки C. Следовательно, $h = b \sin B$.

Тогда площадь треугольника ABC будет равна:

$S = 1/2\ ab \sin B$.

Теорема доказана.

Теорема синусов

Теорема: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$BC = b$;

$CA = c$.

Доказать:

$a/\sin C = b/\sin A = c/\sin B$.

Доказательство:

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 145).

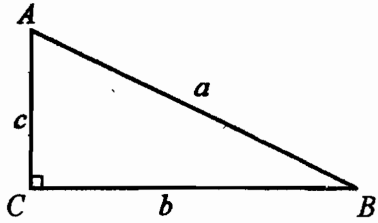


Рис. 145

Его площадь равна:

$S = 1/2\, ab \sin B = 1/2\, bc \sin C = 1/2\, ca \sin A.$

Из этих равенств выводим:

$1/2\, ab \sin B = 1/2\, bc \sin C;$

$a/\sin C = c/\sin B;$

$1/2\, ab \sin B = 1/2\, ca \sin A;$

$a/\sin C = b/\sin A = c/\sin B.$

Итак,

$a/\sin C = b/\sin A = c/\sin B.$

Теорема доказана.

Следствие

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Теорема косинусов

Теорема: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Дано:

$\Delta ABC;$

$AB = a;$

$BC = b;$

$CA = c.$

Доказать:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

Доказательство:

Введем систему координат в точке C (рис. 146).

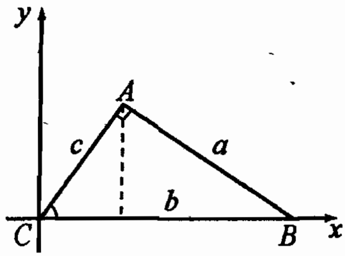


Рис. 146

При этом точка B будет иметь координаты (b; 0), а точка A по теореме Пифагора — координаты ($c \cos C$; $c \sin C$).

По формуле расстояния между двумя точками получаем равенство:

$AB^2 = a^2 = (c \cos C - b)^2 + c^2 \sin^2 C = c^2 \cos^2 C + c^2 \sin^2 C - 2\,bc \cos C + b^2 = c^2 + b^2 - 2\,bc \cos C$.

Таким образом, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

Теорема доказана.

Следствие

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной их них на проекцию другой (знак «+» берут, когда противолежащий угол тупой, а знак «−» — когда угол острый).

Теорема: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм;

AC и BD — диагонали;

$\angle DAB = \alpha$;

$\angle ABC = \beta$.

Доказать:

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 147).

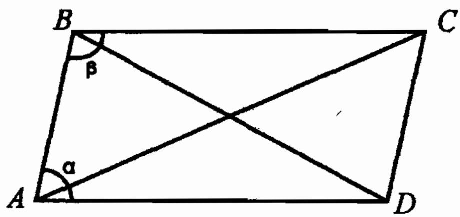


Рис. 147

По теореме синусов из треугольников ABC и ABD получаем:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \cos\beta$;

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \times AD \cos\alpha$.

Сложим эти равенства, получим:

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Теорема доказана.

Решение треугольников

Решением треугольника называют нахождение трех его сторон и трех его углов по каким-нибудь трем данным элементам. Рассмотрим четыре задачи решения треугольников. Во всех задачах стороны треугольника ABC обозначены: $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$. Углы треугольника обозначим: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (рис. 148).

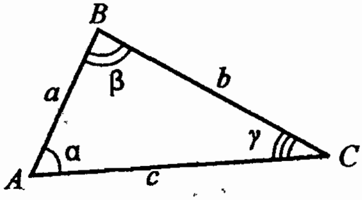


Рис. 148

Задача 1: даны сторона и два угла треугольника. Найти третий угол и две другие стороны.

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$\angle A = \alpha$;

$\angle B = \beta$.

Найти:

$\angle C$;

стороны BC и AC.

Решение:

1. Из суммы углов треугольника находим угол C:

$\angle C = 180° - \alpha - \beta$.

2. По теореме синусов находим стороны BC и AC:

$AB/\sin C = BC/\sin A = AC/\sin B$;

$a/\sin (180° - \alpha - \beta) = BC/\sin \alpha = AC/\sin \beta$.

Отсюда выводим:

$BC = (a \times \sin \alpha)/\sin (180° - \alpha - \beta)$;

$AC = (a \times \sin \beta)/\sin (180° - \alpha - \beta)$.

Задача решена.

Задача 2: даны две стороны и угол между ними. Найти остальные два угла и третью сторону.

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$BC = b$;

$\angle B = \beta$.

Найти:

сторону AC;

$\angle A$ и $\angle C$.

Решение:

1. По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$;

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$;

$AC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta)}$.

2. По теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$;

$b^2 = a^2 + AC^2 - 2a \times AC \cos A$;

$b^2 = a^2 + AC^2 - 2a \times AC \cos A$;

$\cos A = (a^2 + AC^2 - b^2)/2a \times AC$.

По таблице или с помощью микрокалькулятора находим значение A.

Из суммы углов треугольника находим угол C:

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$;

$\angle C = 180° - \angle A - \beta$.

Задача решена.

Задача 3: даны две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найти остальные два угла и третью сторону.

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$BC = b$;

$\angle A = \alpha$.

Найти:

сторону AC;

$\angle B$ и $\angle C$.

Решение:

1. По теореме синусов:

$AB/\sin C = BC/\sin A = AC/\sin B$;

$a/\sin C = b/\sin \alpha = AC/\sin B$;

$\sin C = (a \times \sin \alpha)/b$

По $\sin C$ находим отвечающие ему углы γ_1 и γ_2. Выбираем из них один или оба, учитывая, что против большей их сторон a и b лежит больший угол.

По сумме углов треугольника находим B:

$\angle B = 180° - \alpha - \gamma$.

2. По теореме синусов находим AC:

$AC = (b \times \sin B)/\sin \alpha$.

Задача решена.

Задача 4: даны три стороны треугольника. Найти его углы

Дано:

ΔABC;

$AB = a$;

$BC = b$;

$CA = c$.

Найти:

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение:

По теореме косинусов:

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$.

Отсюда:

$\cos B = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$.

По таблице или с помощью микрокалькулятора находим $\angle B$.

2. $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos C$;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

Отсюда:

$\cos C = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$.

По таблице или с помощью микрокалькулятора находим $\angle C$.

3. По сумме углов треугольника находим A:

$\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.

Задача решена.

Глава 14
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Окружность, описанная около правильного многоугольника

Теорема: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Дано:

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ — правильный многоугольник;

т. B — точка пресечения биссектрис многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Доказать:

окружность с центром в т. B и радиусом BA_1 является описанной около многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$;

окружность в центром в т. B и радиусом BA_1 является единственной описанной около многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Доказательство:

1. Рассмотрим правильный многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ и описанную около него окружность (рис. 149*а*). Выполним дополнительные построения. Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2. На их пересечении поставим т. B. Соединим эту точку со всеми остальными вершинами многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (рис. 149*б*). Докажем, что $BA_1 = BA_2 = \dots = BA_n$.

Рассмотрим треугольники A_1A_2B и A_2A_3B (рис. 149*в*).

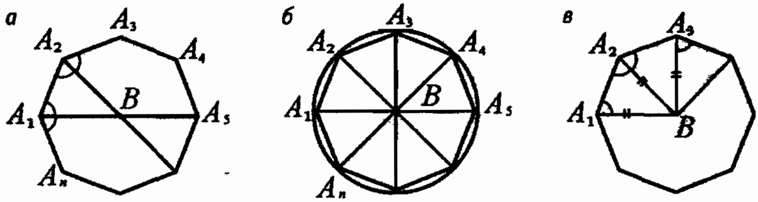


Рис. 149

Они равны по двум сторонам и углу между ними:

$A_1A_2 = A_2A_3$;

сторона A_2B — общая;

$\angle A_1A_2B = \angle BA_2A_3$.

Из равенства треугольников следует, что $BA_1 = BA_3$.

Таким способом можно доказать, что $BA_2 = BA_4$, $BA_3 = BA_5 = BA_4 = BA_6$ и т. д.

Следовательно, $BA_1 = BA_2 = ... = BA_n$. Из этого равенства следует, что т. B равно удалена от всех вершин многоугольника $A_1A_2A_3 ... A_n$. Значит, окружность с центром в т. B и радиусом BA_1 является описанной около многоугольника $A_1A_2A_3 ... A_n$.

2. Рассмотрим три любые вершины многоугольника $A_1A_2A_3 ... A_n$. Например, точки A_1, A_2, A_3. Через эти три точки может проходить только одна окружность. Следовательно, и около многоугольника $A_1A_2A_3 ... A_n$ можно описать только одну окружность.

Теорема доказана.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Теорема: в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Дано:

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ — правильный многоугольник;

т. B — центр окружности, описанной около многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$;

BA_1, BA_2, $BA_3 \dots BA_n$ — биссектрисы углом многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$;

BH_1, BH_2, $BH_3 \dots BH_n$ — высоты треугольников BA_1A_2, $BA_2A_3 \dots BA_nA_1$.

Доказать:

окружность с центром в т. B и радиусом BH_1 является вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$;

окружность с центром в т. B и радиусом BH_1 является единственной вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Доказательство:

1. Рассмотрим многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (рис. 150).

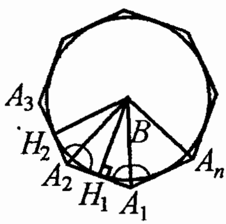


Рис. 150

В предыдущей теореме было доказано, что треугольники BA_1A_2, $BA_2A_3 \dots BA_nA_1$ равны. Следовательно, высоты этих треугольников BH_1, BH_2, $BH_3 \dots BH_n$ тоже равны. Значит, окружность с центром в т. B и радиусом BH_1 проходит также через точки H_2, $H_3 \dots H_n$, т. е. она касается сторон многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$ в этих точках. Таким образом, можно сказать, что окружность с центром в т. B и радиусом BH_1 является вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

2. Допустим, что существует еще одна окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Ее центр B_1 будет равно

удален от всех сторон многоугольника. Следовательно, точка B_1 будет лежать на каждой из биссектрис углом многоугольника и совпадет с т. B, которая является точкой пересечения этих биссектрис.

Радиус второй окружности будет равен расстоянию от точки B до сторон многоугольника, а значит, равен OH_1. Следовательно, вторая окружность совпадает с первой. Значит, окружность с центром в т. B и радиусом BH_1 является единственной вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Теорема доказана.

Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Площадь правильного выпуклого многоугольника

Площадь правильного выпуклого многоугольника находят по формуле:

$$S = 1/2\,Pr,$$

где P — периметр многоугольника; r — радиус вписанной в многоугольник окружности.

Дано:

a_n — сторона многоугольника;

r — радиус вписанной в многоугольник окружности;

S — площадь многоугольника.

Доказать:

$S = 1/2\,Pr$.

Доказательство:

Если вершины n-угольника соединить с центром фигуры, образуется n равных треугольником. Площадь каждого такого треугольника будет равна:

$S_n = 1/2\, a_n r$.

Отсюда находим площадь многоугольника:

$S = n\, 1/2\, a_n r = 1/2\, (na_n)\, r = 1/2\, Pr$ (1).

Утверждение доказано.

Сторона правильного многоугольника и радиус вписанной в него окружности

Сторона многоугольника вычисляется по формуле:

$a_n = 2R \sin 180°/n$.

Радиус вписанной в многоугольник окружности вычисляется по формуле:

$r = R \cos 180°/n$.

Дано:

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ — правильный многоугольник;

a_n — сторона многоугольника;

α — угол многоугольника;

r — радиус вписанной в многоугольник окружности;

R — радиус описанной около многоугольника окружности;

S — площадь многоугольника.

Доказать:

$a_n = 2R \sin 180°/n$;

$r = R \cos 180°/n$.

Доказательство:

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (рис. 151).

Из прямоугольного треугольника A_1H_2B находим $\angle A_1$:

$\angle A_1 = \beta_n/2 = 180°(n-2)/2n = 90° - 180°/n$;

$a_n = 2\, A_1H_2 = 2\, R \cos (90° - 180°/n) = 2\, R \sin 180°/n$;

$r = BH_1 = R \sin (90° - 180°/n) = R \cos 180°/n$.

Теорема доказана.

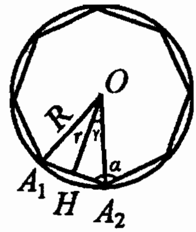


Рис. 151

Формулы вычисления сторон правильного треугольника, квадрата и шестиугольника и радиусов

Стороны правильного треугольника, квадрата и шестиугольника вычисляются по формулам:

$a_3 = 2R \sin 180°/3 = 2R \sin 60° = 2R(\sqrt{3})/2 = R\sqrt{3}$;

$a_4 = 2R \sin 180°/4 = 2R \sin 45° = 2R(\sqrt{2})/2 = R\sqrt{2}$;

$a_6 = 2R \sin 180°/6 = 2R \sin 30° = 2R\,1/2 = R$.

Формулы нахождения радиусов вписанной и описанной окружностей для правильного многоугольника по его стороне

Дано:

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ — правильный многоугольник;

a_n — сторона многоугольника;

α — угол многоугольника;

r — радиус вписанной в многоугольник окружности;

R — радиус описанной около многоугольника окружности.

Найти:

r — ?

R — ?

Решение:

Рассмотрим правильный многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (рис. 151).

$\gamma = 90° - \beta/2 = 90° = 90° - 180°(n-2)/2n = 180°/n$;

$R = OA_1 = H A_1/\sin\gamma = a/2\sin(180°/n)$;

$r = OH = H A_1/\mathrm{tg}\,\gamma = a/2\,\mathrm{tg}\,(180°/n)$.

Формулы вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей для правильного треугольника, квадрата и шестиугольника

Радиусы описанных окружностей для правильного треугольника, квадрата и шестиугольника вычисляются по формулам:

$R_3 = a/2\sin(180°/3) = a/2\sin 60° = a/\sqrt{3}$;

$R_4 = a/2\sin(180°/4) = a/2\sin 45° = a/\sqrt{2}$;

$R_6 = a/2\sin(180°/6) = a/2\sin 30° = a$.

Радиусы описанных окружностей для правильного треугольника, квадрата и шестиугольника вычисляются по формулам:

$r_3 = a/2\,\mathrm{tg}\,(180°/3) = a/2\,\mathrm{tg}\,60° = a/2\sqrt{3}$;

$r_4 = a/2\,\mathrm{tg}\,(180°/4) = a/2\,\mathrm{tg}\,45° = a/2$;

$r_6 = a/2\,\mathrm{tg}\,(180°/6) = a/2\,\mathrm{tg}\,30° = a\sqrt{3}/2$.

Свойства окружности

Теорема: отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для всех окружностей.

Дано:

l_1 — длина окружности 1;

l_2 — длина окружности 2;

R_1 — радиус окружности 1;

R_2 — радиус окружности 2.

Доказать:

$l_1/2R_1 = l_2/2R_2$.

Доказательство:

Пусть $l_1/2R_1 \neq l_2/2R_2$, например $l_1/2R_1 < l_2/2R_2$.

Впишем в данные окружности правильные выпуклые многоугольники. При большом числе сторон многоугольников их периметры будут мало отличаться от длин окружностей, в которые они вписаны. Следовательно, первоначальное неравенство не нарушится, если длины окружностей заменить в нем периметрами вписанных многоугольников:

$P_1/2R_1 < P_2/2R_2$.

Известно, что периметры правильных многоугольников относятся как радиусы описанных вокруг них окружностей:

$P_1/P_2 = R_1/R_2$.

Из этого равенства выводим:

$P_1/R_1 = P_2/R_2$.

Однако это равенство противоречит условию $P_1/2R_1 < P_2/2R_2$. Следовательно, $P_1/2R_1 = P_2/2R_2$.

Теорема доказана.

Отношение длины окружности к ее диаметру принято обозначать греческой буквой π:

$l/2R = \pi$.

Число π является иррациональным. Его приближенное значение: $\pi \approx 3{,}1416$.

Из соотношения $l/2R = \pi$ выводим формулу нахождения длины окружности:

$l = 2\pi R$.

Центральный угол и дуга окружности

Часть плоскости, образованная после разбития ее углом на две части, называется *плоским углом.*

Плоские углы называются *дополнительными*, если они имеют общие стороны.

Центральным углом в окружности называется плоский угол, вершина которого совпадает с центром данной окружности.

Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой*. Она соответствует центральному углу. *Градусной мерой дуги* называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Длина дуги, отвечающая центральному углу α, равна: $l = \pi R\alpha/180$.

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.

$l/R = n \times \pi/180$.

Радианная мера угла 180° равна π.

Радианная мера угла 90° равна $\pi/2$.

Единицей радианной мерой является радиан. Один радиан равен углу, длина которого равна радиусу окружности.

Градусная мера одного радиана равна $180°/\pi \approx 57°$.

Площадь круга

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного (рис. 152).

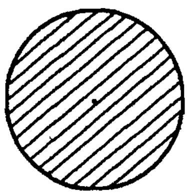


Рис. 152

Данная точка называется *центром круга*, а данное расстояние — *радиусом круга*. Окружность с центром в данной точке и данным радиусом является *границей круга*.

Теорема: площадь круга равна половине произведения длины, ограничивающей его окружности на радиус.

$S = \pi R^2$.

Дано:

Окружность с центром в т. O;

R — радиус окружности с центром в т. O;

l — длина окружности с центром в т. O и радиусом R;

P_1 — правильный многоугольник, вписанный в окружность с центром в т. O и радиусом R;

P_2 — правильный многоугольник, описанный около окружности с центром в т. O и радиусом R;

n — количество сторон многоугольников P_1 и P_2;

S — площадь круга, ограниченного окружностью с центром в т. O и радиусом R.

Доказать:

$S = l\,R/2$.

Доказательство:

Рассмотрим многоугольник P_1 (рис. 153).

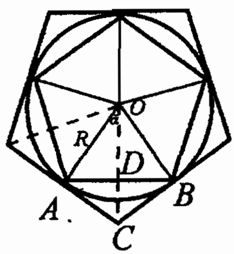


Рис. 153

Соединим т. O с вершинами многоугольника P_1. Образовались треугольники, равные ΔABO. Соединим т. O с вершиной многоугольника P_2 точкой C. Она пересекает сторону AB многоугольника P_2 в точке D. OD является высотой и биссектрисой ΔABO. $\angle AOD$ обозначим α.

Таким образом, площадь многоугольника будет равна:

$S\ (P_1) = nS(\Delta ABO)$;

$S\ (\Delta ABO) = AD \times OD = AD \times AO \cos \alpha$;

$S\ (P_1) = nADR \cos \alpha$.

Обозначим $n \times AD$ через периметр p многоугольника P_1, получим:

$S\ (P_1) = R \cos \alpha\, p/2$.

Так же находим площадь многоугольника P_2:

$S\ (P_2) = nS(\Delta EOC)$;

$S\ (\Delta EOC) = AO \times AC = AO\ AD/\cos \alpha$;

$S\ (P_1) = n\ AD\ R/\cos \alpha = pR/2 \cos \alpha$.

Итак:

$S\ (P_1) = R \cos \alpha\, p/2$;

$S\ (P_1) = \pi R/2 \cos \alpha$.

Поскольку при большом количестве сторон многоугольников P_1 и P_2 длина окружности мало отличается от периметра p, а $\cos \alpha$ из-за малой меры угла мало отличается от единицы, то и площади $S\ (P_1)$ и $S\ (P_2)$ многоугольников P_1 и P_2 мало отличаются от $l\ R/2$.

Следовательно, площадь круга равна:

$S = l\ R/2$ или $S = \pi R^2$.

Теорема доказана.

Площадь кругового сектора

Круговым сектором (или просто сектором) называют часть круга, находящуюся внутри соответствующего центрального угла (рис. 154).

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S = (\pi R^2/360)\ \alpha,$$

где R — радиус круга; α — градусная мера соответствующего центрального угла.

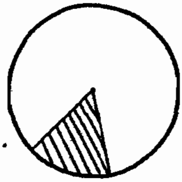


Рис. 154

Площадь кругового сегмента

Круговым сегментом называют общую часть круга и полуплоскости (рис. 155).

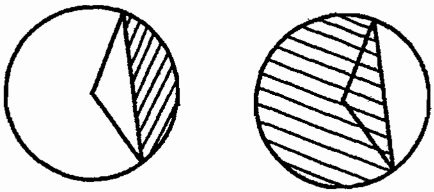


Рис. 155

Площадь сегмента, не равного полукругу:

$S = (\pi R^2/360)\ \alpha \pm S_\Delta$.

α — градусная мера центрального угла, содержащего дугу данного кругового сегмента,

S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор.

Знак «+» ставят при $\alpha < 180°$, а знак «–» — при $\alpha > 180°$.

Глава 15
ДВИЖЕНИЯ

Симметрия

Симметрия относительно прямой

Две точки называются *симметричными относительно прямой*, если эта прямая проходит через середину отрезка, образованного этими точками, и перпендикулярна ему (рис. 156*а*). Все точки прямой симметричны себе.

Фигура называется *симметричной относительно прямой*, если каждая точка фигуры имеет симметричную ей точку, также принадлежащую этой фигуре (рис. 156*б*).

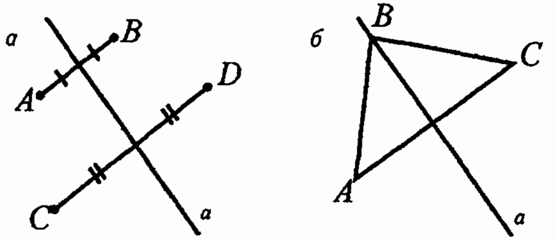


Рис. 156

Прямая, относительной которой одни точки фигуры симметричны другим, называется *осью симметрии фигуры*. Фигура, имеющая ось симметрии, называется также *фигурой, обладающей осевой симметрией*. Осевая симметрия отображает плоскость на себя.

Развернутый угол и равнобедренный треугольник имеют одну ось симметрии (рис. 157*а*). Прямоугольник и ромб имеют две оси симметрии (рис. 157*б*). Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 157*в*). Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 157*г*). У окружности бесконечное множество осей симметрии (рис. 157*д*).

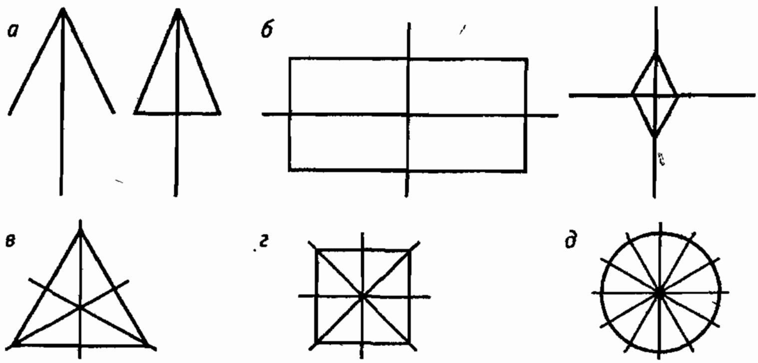


Рис. 157

Такие фигуры, как параллелограмм, разносторонний треугольник, неравнобедренная трапеция и иные, не имеют ни одной оси симметрии.

Симметрия относительно точки

Две точки называются *симметричными относительно третьей точки*, если она является серединой отрезка, соединяющего эти две точки (рис. 158*а*). Третья точка симметрична сама себе.

Фигура называется *симметричной относительно точки*, если каждая точка фигуры имеет симметричную ей точку, принадлежащую этой же фигуре. Точка, относительно которой строится симметрия, называется *центром симметрии фигуры*. Фигура, имеющая точку симметрии, называется *фигурой, обладающей центральной симметрией*. К таким фигурам относятся параллелограмм, окружность, квадрат и т. п. (рис. 158*б*). Они обладают одной точкой симметрии.

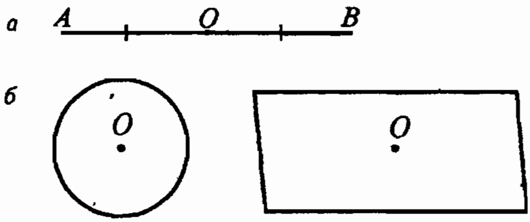


Рис. 158

Прямая обладает бесконечным множеством точек симметрии. Треугольник не имеет ни одной точки симметрии.

У параллелограмма центр симметрии совпадает с точкой пересечения его диагоналей.

Движение

Движение плоскости — это отображение плоскости на себя с сохранением расстояния.

Центральная симметрия плоскости тоже является движением.

Теорема: при движении отрезок отображается на отрезок.

Дано:

Отрезок AC;

т. A_1 и т. C_1 — отображения т. A и т. C при движении плоскости.

Доказать:

отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1.

Доказательство:

1. Возьмем произвольную точку B, принадлежащую отрезку AC (рис. 159).

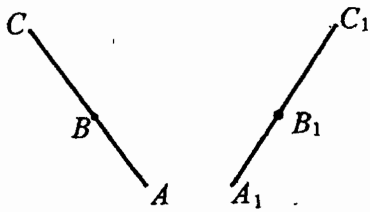


Рис. 159

$AC = AB + BC$.

Точка C отобразится в т. C_1. Поскольку расстояния при движении сохраняются, то будут справедливы следующие равенства:

$A_1C_1 = AC$;

$A_1B_1 = AB$;

$B_1C_1 = BC$.

Получаем: $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$.

Это значит, что т. B_1 принадлежит отрезку A_1C_1, иначе было бы верно неравенство: $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$.

Таким образом, все точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1.

2. Допустим, произвольная т. M при заданном движении отображается в т. M_1 отрезка A_1C_1. Тогда справедливо равенство:

$AM + MC = AC$.

Следовательно, т. M принадлежит отрезку AC. Значит, каждая точка отрезка A_1C_1 является отображением какой-нибудь точки отрезка AC.

Теорема доказана.

Наложение и движения

Наложением фигуры P на фигуру P_1 является отображение фигуры P на фигуру P_1.

Любая точка плоскости отображается в определенную точку плоскости.

Наложение — это отображение плоскости на себя. При этом выполняются следующие условия.

1. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

2. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

3. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

4. Любой угол ab можно совместить наложением с равным ему углом a_1b_1 двумя способами:

1) так, что луч a совместится с лучом a_1, а луч b с лучом b_1;

2) так, что луч a совместится с лучом b_1, а луч b совместится с лучом a_1.

5. Любая фигура равна самой себе.

6. Если фигура P_1 равна фигуре P_2, а фигура P_2 равна фигуре P_3, то фигура P_1 равна фигуре P_3.

Теорема: при наложении различные точки отображаются в различные точки.

Дано:

фигура P_1, состоящая из т. A и т. B;

фигура P_2, состоящая из т. C.

Доказать:

т. A и т. B не отображаются в одну точку C.

Доказательство:

Пусть т. A и т. B отображаются в одну C фигуры P_2. Тогда фигура P_1 должна быть равна фигуре P_2. Это значит, что при наложении фигура P_2 отображается в фигуру P_1, т. е. точка C отображается в точку A и точку B.

Однако при любом отображении точки ей соответствует только одна точка плоскости. Значит, равенство $P_1 = P_2$ невозможно. Следовательно, точка A и точка B не могут отобразиться в одну точку C.

Теорема доказана.

Следствие

При наложении отрезок отображается в равный ему отрезок.

Теорема: любое движение является наложением.

Дано:

ΔABC;

произвольное движение g.

Доказать:

g — является наложением.

Доказательство:

При движении g ΔABC отобразится в $\Delta A_1B_1C_1$. При этом $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Из равенства треугольников следует, что существует наложение j, при котором точки A, B, C отображаются в точки A_1, B_1, C_1.

Пусть движение g не совпадает с наложением j. Это значит, что на плоскости есть хоть одна точка X_1, которая при движении g отображается в точку X_1, а при наложении j — в точку X_2.

Поскольку при отображениях j и g расстояния сохраняются, справедливы равенства:

$$AX = A_1X_1 \qquad AX = A_1X_2;$$
$$BX = B_1X_1 \qquad BX = B_1X_2.$$

Из этих равенств выводим:

$A_1X_1 = A_1X_2 \quad A_1X_1 = A_1X_2$.

Это значит, что точка A_1 равноудалена от точки X_1 и точки X_2 (рис. 160), а точка B_1 равноудалена от точек X_1 и X_2.

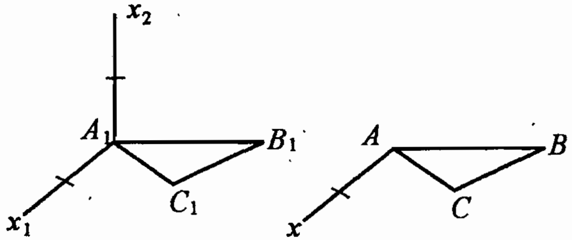


Рис. 160

Следовательно, точки A_1, B_1, C_1 лежат на срединном перпендикуляре к отрезку X_1X_2. Но это невозможно, т. к. точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой.

Значит, отображения j и g совпадают, следовательно, движение g является наложением.

Теорема доказана.

Обратная теорема: любое наложение является движением.

Дано:

отрезок AB;

j — наложение отрезка AB.

Доказать:

наложение j является движением плоскости.

Доказательство:

При наложении j концы отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1. Следовательно, отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1. Значит, $AB = A_1B_1$.

Равные отрезки имеют равные длины, следовательно, наложение j является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния. Это значит, что наложение j является движением плоскости.

Теорема доказана.

Теорема: точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

Дано:

точки A, B и C — принадлежат одной прямой;

точка B лежит между точками A и C.

A_1, B_1, C_1 — точки, в которые переходят точки A, B, C при движении.

Доказать:

точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой;

точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Доказательство:

1. Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, то они составляют треугольник с вершинами A_1, B_1, C_1. Тогда справедливо следующее неравенство:

$A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$.

Из неравенства следует, что:

$AC < AB + BC$ (по определению движения).

Однако это противоречит условию: $AC = AB + BC$. Следовательно, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. Пусть точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1. Тогда справедливо равенство:

$A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$.

Из равенства следует, что:

$AB + AC = BC$.

Однако это противоречит условию: $AC = AB + BC$.

Итак, из трех точек, лежащих на одной прямой, точки A_1 и C_1 не лежат между двумя другими, следовательно, этому условию удовлетворяет третья точка — точка B_1.

Теорема доказана.

Следствие 1

При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.

Следствие 2

При движении сохраняются углы между полупрямыми.

Следствие 3

При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор **называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка** A **отображается в такую точку** A_1**, что вектор** AA_1 **равен вектору (рис. 161).**

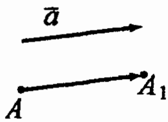


Рис. 161

Теорема: при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

Дано:

т. $A(x_1, y_1)$;

т. $B(x_2, y_2)$;

$A'(x_1 + a, y_1 + b)$ и $B'(x_2 + a, y_2 + b)$ — точки отображения точек A и B.

Доказать:

$AA' = BB'$.

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник $AA'BB'$ (рис. 162).

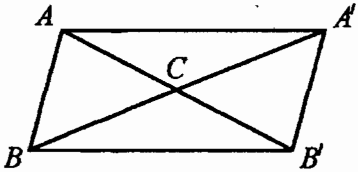


Рис. 162

Точка C — середина отрезка AB'. Эта точка имеет координаты:

$x = (x_1 + x_2 + a)/2$, $y = (y_1 + y_2 + b)/2$.

Эти значения соответствуют координатам середины отрезка BA'. Следовательно, диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, $AA'B'B$ — параллелограмм.

По свойствам параллелограмма $AA' \parallel BB'$, $AA' = BB'$.

Теорема доказана.

Следствие

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

Дано:

т. $A(x_1, y_1)$;

т. $B(x_2, y_2)$;

$A'(x_1 + a, y_1 + b)$ и $B'(x_2 + a, y_2 + b)$ — точки отображения точек A и B.

Доказать:

т. B лежит на прямой AA'.

Доказательство:

Поскольку точка B лежит на прямой AA', а середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA', то точка B тоже лежит на прямой AA'.

Тогда AA' и BB' равны:

$$AA' = \sqrt{((x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

$$BB' = \sqrt{((x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Итак, точки A и B смещаются по прямой AB на одинаковое расстояние, а прямая отображается в саму себя.

Теорема: каковы бы ни были две точки A и B, существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B.

Дано:

A, B — произвольные точки фигуры.

Доказать:

существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B.

Доказательство:

1. Пусть C — произвольная точка, а C_1 — точка, в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A в точку C (рис. 163). Отрезки CB и AC_1 имеют общую середину в точке O.

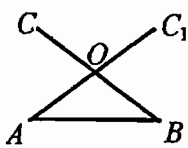


Рис. 163

Точка C определяет точку A как середину отрезка BC. А точки A и O определяют точку C_1, поскольку точка O является серединой отрезка AC_1. Однозначность определения точки C_1 доказывает единственность параллельного переноса.

2. Введем декартовы координаты на плоскости:

$A\ (a_1,\ a_2)$; $B\ (b_1,\ b_2)$.

Тогда параллельный перенос, переводящий точку A в точку B, можно задать следующими равенствами:

$x' = x + b_1 - a_1$, $y' = y + b_2 - a_2$.

При $x = a_1$ и $y = a_2$, получаем: $x' = b_1$, $y' = b_2$.

Теорема доказана.

Теорема: параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняюшим расстояние.

Дано:

вектор $\bar{a}$;

точки A и B.

Доказать:

параллельный перенос точек A и B на вектор $\bar{a}$ является движением.

Доказательство:

При параллельном переносе на вектор точки A и B отображаются в точки A_1 и B_1 (рис. 164).

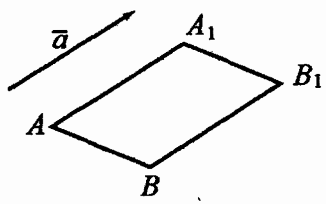


Рис. 164

При этом справедливы равенства:

$\overline{AA_1} = \bar{a}$;

$\overline{BB_1} = \bar{a}$.

Отсюда следует, что:

$\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.

Значит, $AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = BB_1$.

Таким образом, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм. В параллелограмме противолежащие стороны равны, следовательно:

$AB = A_1B_1$.

Это значит, что расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками A_1, B_1.

Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками, следовательно, он является движением.

Теорема доказана.

Теорема: преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают снова параллельный перенос.

Дано:

параллельный перенос;

преобразование, обратное параллельному переносу;

параллельный перенос, выполненный последовательно после первого.

Доказать:

обратное преобразование является параллельным переносом;

два последовательных параллельных переноса дают параллельный перенос.

Доказательство:

1. Параллельный перенос задается формулами:

$x' = x + a$;

$y' = y + b$.

Обратное преобразование задается формулами:

$x = x' - a$;

$y = y' - b$.

Параллельный перенос и обратное преобразование задаются формулами одного вида, следовательно, обратное преобразование является параллельным переносом.

2. Два параллельных переноса, выполненных последовательно, задаются формулами:

$x' = x + a;$ $y' = y + b;$

$x'' = x' + c;$ $y'' = y' + d.$

В результате образуется преобразование, которое будет задаваться формулами:

$x'' = x + a + c;$ $y'' = y + b + d.$

Такое преобразование тоже будет являться параллельным переносом.

Теорема доказана.

Поворот

Поворотом плоскости вокруг точки A на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка B отображается в точку B_1 так, что $AB = AB_1$, а угол $BAB_1 = \alpha$ (рис. 165).

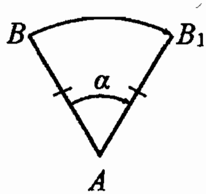


Рис. 165

Точка A остается на месте, говорят, что она отображается сама в себя. Все остальные точки поворачиваются вокруг точки A в одном и том же направлении.

Теорема: поворот является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние.

Дано:

т. O — центр поворота;

α — угол поворота по часовой стрелке;

т. A и т. B.

Доказать:

поворот является движением.

Доказательство:

Пусть при повороте на угол α точки A и B отображаются в точки A_1 и B_1.

Треугольники OAB и OA_1B_1 равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними):

$OA = OA_1$;

$OB = OB_1$;

$\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha + \angle A_1OB$.

Из равенства треугольников выводим:

$AB = A_1B_1$.

Это значит, что расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками A_1, B_1.

Таким образом, поворот сохраняет расстояния между точками, следовательно, является движением.

Теорема доказана.

РАЗДЕЛ II
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

Глава 1
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Начнем с аксиом стереометрии и некоторых следствий из аксиом.

Аксиома 1 (аксиома плоскости)

В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки в пространстве проходит плоскость.

Внимание! Надо понимать, что плоскостей в пространстве больше одной. Из аксиомы 1 следует, что:

1) множество точек пространства бесконечно;

2) плоскость проходит не только через каждые три точки, но и через каждые одну или две точки.

Аксиома 2 (аксиома пересечения плоскостей)

Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.

Две плоскости, имеющие общую точку (и тем самым общую прямую), называются *пересекающимися плоскостями*.

Используя именно эту аксиому, находят пересечение плоскостей с многогранниками — сечение многогранников.

Аксиома 3
(аксиома принадлежности прямой плоскости)

Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.

Из этой аксиомы следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются *пересекающимися.*

Внимание! Третьим свойством плоскости пользуются на практике, когда надо проверить, является ли данная поверхность плоской? В этом случае к поверхности прикладывают несколько раз линейку. Если поверхность плоская, то линейка должна целиком лечь на нее.

Перед аксиомой 4 введем определение полупространства. *Полупространством, ограниченным плоскостью* L, называется фигура со следующими свойствами:

1) она содержит плоскость L, но не совпадает с ней;

2) если точки A и B принадлежат фигуре, но не плоскости L, то отрезок AB не имеет с L общих точек;

3) если же точка A принадлежит фигуре, а B — нет, то отрезок AB имеет с L общую точку.

Плоскость, ограничивающую полупространство, называют его *границей.*

Аксиома 4
(аксиома разбиения пространства плоскостью)

Каждая плоскость разбивает пространство на 2 полупространства.

Говорят, что две фигуры лежат по одну сторону от плоскости, если они принадлежат одному из полупространств, ограниченных данной плоскостью, а по разные стороны от плоскости, если они принадлежат разным полупространствам, ограниченным этой плоскостью, причем каждая из фигур имеет точки внутри этих полупространств.

Аксиома 5 (аксиома расстояния)

Расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измерено.

Теорема: через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Дано:

a — прямая;

$B \notin a$.

Доказать:

прямая a и точка B задают плоскость, притом только одну, т. е. плоскость L существует, и она единственна.

Доказательство:

Докажем существование плоскости L.

Утверждение	*Обоснование*
1. A — данная прямая $B \notin a$	условие аксиома планиметрии: какова бы ни была
2. $A \in a$	прямая, существуют точки, принадлежащие, ей и точки, не принадлежащие этой прямой
3. Проведем через точки A и B прямую b	аксиома планиметрии: через любые две точки можно провести прямую, и только одну
4. Прямые a и b различны, т. к.	$B \in b$, $B \notin a$
5. Через прямые a и b проведем плоскость L	аксиома стереометрии: если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну ($A \in a$, $A \in b$).

Вывод: плоскость L проходящая через прямую a и точку B существует.

Докажем единственность плоскости L (способом от противного).

Утверждение	***Обоснование***
1. Существует $L_1 \neq L$, проходящая через прямую a и точку B	предположение
2. $L_1 \cap L = a$	аксиома стереометрии: если две различные плоскости имеют общую точку (в нашем случае плоскости L_1 и L имеют общую точку B), то они пересекаются по прямой (в нашем случае это прямая a)
3. Любая общая точка плоскостей L_1 и L лежит на прямой a	из 2-го шага: $A \in L$, $A \in L_1$
4. $B \in L_1$, $= B \in a$	из 2-го шага
$B \in L_1$	по условию
5. $B \in a$	

Вывод: 4-й и 5-й шаги привели нас к противоречию, тем самым доказана единственность плоскости L.

Параллельные прямые

Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема: через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Дано:
прямая a;
т. $A \notin a$.

Доказать:

что через т. A можно провести прямую параллельную a, причем:

1) такая прямая существует;

2) и она единственная.

Докажем существование прямой.

Утверждение	*Обоснование*
1. Прямая a т. $A \notin a$	условие
2. Проведем через т. A и прямую a ($A \in a$) плоскость L	такая плоскость существует и единственна на основании теоремы*
3. Проведем в плоскости L прямую $a_1 \parallel a$, $A \in a_1$	аксиома планиметрии**

Вывод: существование прямой $a_1 \parallel$ прямой a в плоскости L доказано.

Примечание. При доказательстве данной теоремы ссылались на теорему *: Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

И аксиому планиметрии **: Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

•

Докажем, что такая прямая a_1 — единственная

1. Пусть $a_2 \parallel a$, причем т. $A \in a_2$	предположение
2. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость L_2	параллельные прямые a и a_2 лежат в одной плоскости L по определению на основании теоремы: через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

3. Плоскость L = плоскости L_2
4. В плоскости L существует ед. $a_1 \parallel a$,

Следовательно, $a_2 = a_1$

Прямая, параллельная плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема: если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Дано:
плоскость L,
$a \notin L$;
$a_1 \in L$;
$a_1 \parallel a$.

Доказать:
$a \parallel L$.

Доказательство:

Утверждение	*Обоснование*
1. Проведем плоскость L_1 через параллельные прямые a и a_1	параллельные прямые a и a_1 лежат в одной плоскости L_1 по определению параллельности прямой и плоскости
2. $L_1 \neq L$	т. к. $a \in L$ по построению, но $a \in L$ по условию $a_1 \in L$, $a_1 \in L_1$
3. $L \cap L_1 = a_1$	
4. $a \cap L = A$	предположение
5. $A \in a$	из 4-го шага

6. $a \cap a_1 = A$	из 4-го и 5-го шагов следует, что $A \cap a$ и $A \cap a_1$

Итак: 6-й пункт привел нас к противоречию с условием: $a_1 \parallel a$.

Вывод: прямая $a\, A\, L$, а следовательно, $a \parallel L$.

Параллельные плоскости. Признак параллельности двух плоскостей

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема: две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

Дано:

плоскости L и B, $b_1 \in B$, $b_2 \in$ B, $b_1 \cap b_2$, $b_1 \parallel L$, $b_2 \parallel L$.

Доказать:

$L \parallel B$.

Доказательство:

Утверждение	*Обоснование*
1. Плоскости L и B	Условие
$B_1 \cap b_2$, $b_1 \in B$, $b_2 \in B$,	
$b_1 \parallel L$, $B_2 \parallel$ L	также наложено условием
2. $L \neq B$	
3. $L \cap B = C$	допущение
4. $b_1 A\, c$; $b_2 A\, c$	т. к. $b_1 \parallel L$, $b_2 \parallel L$
5. $b_1 \parallel c$; $\mathrm{b}_2 \parallel c$	из 4-го шага в плоскости прямые либо пересекаются, либо параллельны.

Вывод: 5-й шаг привел нас к противоречию с аксиомой параллельных планиметрии: мы получили, что лежащие в плоскости B пересекающиеся прямые b_1 и b_2 параллельны одной и той же прямой c, чего быть не может.

Следовательно, наше допущение о том, что $L \cap B = C$ неверно, а, значит, $L \parallel B$.

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью

Теорема: если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Дано:

$L \parallel B$, $L \cap p = a$, $B \cap p = b$.

Доказать:

$a \parallel b$.

Доказательство:

1. $a \in p$, $b \in p$, $a \cap b = o$.	определение параллельных прямых

Вывод: в нашем случае для прямых a и b полностью выполняется определение параллельности, они лежат в секущей плоскости p, однако они принадлежат параллельным плоскостям L и B, поэтому никогда не пересекаются.

Следовательно, $a \parallel b$.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями

Теорема: отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Дано:

$L_1 \parallel L_2$;
$a \cap L_1 = A_1$;
$a \cap L_2 = A_2$;
$b \cap L_1 = B_1$;
$b \cap L_2 = B_2$;
$a \parallel b$.

Доказать:

$A_1A_2 = B_1B_2$.

Доказательство:

1. $L_1 \parallel L_2$ A и b — пересекающие их параллельные прямые A_1, A_2, B_1, B_2 — точки пересечения прямых с плоскостью	условие
2. Проведем через параллельные прямые a и b плоскость p	по определению параллельные прямые лежат в одной плоскости
3. $p \cap L_1 = A_1B_1$ $P \cap L_2 = A_2B_2$	согласно аксиоме: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой
4. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм	по определению четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, параллелограмм
5. $A_1B_1 = B_1B_2$	свойство противоположных сторон параллелограмма

Теорема доказана.

Свойства параллельного проектирования

Проекцией данной точки A на какую-нибудь плоскость L называется та точка A этой плоскости, в которой с ней пересекается прямая AM, проведенная из данной точки параллельно заданному направлению XY. Прямая AM называется при этом *проектирующей прямой*, а плоскость L — *плоскостью проекций*.

Проекцией какой-нибудь фигуры на данную плоскость называется геометрическое место проекций всех точек фигуры на эту плоскость.

Свойства проекции прямых линий

1. *Проекцией прямой AB на любую плоскость L является прямая AB.*

В частном случае, когда данная прямая параллельна направлению проектирующих линий, проекция ее обращается в точку, т. к. тогда все проектирующие линии сливаются в одну прямую.

Плоскость, проходящая через AB параллельно данному направлению XY, называется *проектирующей плоскостью для данной прямой.*

$AC/AC = CB/CB$; $AC/CB = AC/CB$.

Отношение отрезков параллельных прямых при параллельном проектировании сохраняется.

2. Если прямая параллельна плоскости проекций, то ее проекция параллельна самой прямой.

3. Отрезок прямой, параллельной плоскости проекций, проектируется на нее в натуральную величину.

4. Отрезок прямой, не параллельной плоскости проекций, проектируется на нее не в натуральную величину.

Внимание! Свойства 3 и 4 применяются при параллельном проектировании прямоугольника, параллелограмма, трапеции и т. д.

Поскольку параллельность прямых при параллельном проектировании сохраняется, то изображением параллелограмма (квадрата, ромба, прямоугольника) служит параллелограмм, длины сторон и величины углов которого можно выбирать произвольно.

Из свойств параллельного проектирования следует, что изображением трапеции является трапеция, у которой отношение длин оснований равно отношению длин оснований оригинала.

Задача

На изображении равнобедренной трапеции построить изображение ее высоты.

На оригинале высота DB, MN — ось симметрии, $DE \parallel MN$.

Пользуясь свойствами параллельного проектирования (проекции параллельных прямых параллельны и длины проекций параллельных отрезков пропорциональны длинам данных отрезков), получаем план построения:

Построив изображение равнобокой трапеции $ABCD$, построим трапецию $A_1B_1C_1D_1$.

1. Отмечаем точки M_1 и N_1 — соответственно середины отрезков A_1B_1 и D_1C_1.
2. Строим прямую M_1N_1.
3. Строим отрезок $D_1E_1 // M_1N_1$.

Вывод: D_1E_1 — искомый отрезок — изображение высоты на изображении равнобедренной трапеции.

Изображением данного треугольника может служить произвольный треугольник.

В частности, равносторонний треугольник можно изображать в виде любого разностороннего треугольника, т. к. при параллельном проектировании величины углов и отношения длин непараллельных отрезков не сохраняются.

Построение правильного шестиугольника при параллельном проектировании

На оригинале точка O — пересечение диагоналей AD и CF — центр симметрии правильного шестиугольника, поэтому ромбы $ABCO$ и $DEFO$ симметричны относительно точки O.

При параллельном проектировании ромб $ABCO$ изображен в виде произвольного параллелограмма $A'B'C'O'$.

Центрально-симметричные относительно точки O точки перейдут в точки, центрально-симметричные относительно точки O', т. к. длины проекций параллельных отрезков пропорциональны длинам данных отрезков. Для построения остальных вершин изображения достаточно построить точки D', E', F' соответственно точки O' точкам A', B' и C'.

Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ — искомое изображение.

Глава 2
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Прямая, перпендикулярная прямой и плоскости

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Теорема: если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двумя прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

Дано:
$a \cap L = A$;
$b \in L$; $c \in L$;
$A \in b$; $A \in c$;
$a \perp b$, $a \perp c$.

Доказать:
$a \perp L$.

Доказательство:

1. $a \cap L = A$ — условие
   $b \in L$; $c \in L$;
   $A \in b$; $A \in c$;
   $a \perp b$, $a \perp c$.

2. $A \in x$; $x \in L$.

Докажем, что прямая x плоскости L проведена произвольно через точку A перпендикулярна b и c.

Проведем прямую НЕ проходящую через точку A, пересекающую прямые c, x, b в точках C, X, B соответственно.	произвольно
Пусть $AA_1 = AA_2$	на прямой a выше и ниже точки A отложили равные отрезки
Рассмотрим ΔA_1CA_2 У него $A_1C = A_2C$ т. е. ΔA_1CA_2 — равнобедренный, т. к. $AC \perp a$ по условию AC — медиана по построению.	
ΔA_1BA_2 — равнобедренный	аналогично
$\Delta A_1CB = \Delta A_2CB$	по трем сторонам (3 признак равенства треугольников)
$\angle A_1BX = \angle A_2BX$	в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы
$\Delta A_1BX = \Delta BA_2X$	по двум сторонам и углу, лежащему между этими сторонами (1 признак равенства треугольников)
$A_1X = A_2X$	в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны
ΔA_1B_1X — равнобедренный	
XA — меридиана	

XA — высота	свойство медианы равнобедренного треугольника

Вывод: $a \perp x$, следовательно, по определению прямой, перпендикулярной плоскости, $a \perp L$.

Три перпендикуляра

Теорема: прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной.

Справедливо и обратное утверждение: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной

Дано:

$AB \perp L$;

AC — наклонная;

CB — проекция наклонной;

точка C — основание наклонной;

$C \in L$; $C \in c$, $c \perp CB$.

Доказать:

$C \perp AC$.

Доказательство:

1. $CA' \perp L$	построили
2. $CA' \parallel AB$	ссылка на теорему: две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны
3. Плоскость B	задается параллельными прямыми CA' и AB
4. $c \perp CA'$	т. к. по условию $AB \perp L$, но $A'C \parallel AB$, следовательно, $A'C \perp L$ по определению прямой, перпендикулярной к плоскости: прямая $A'C$,

	пересекающая плоскость L в точке C, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой c в плоскости, проходящей через точку C — точку пересечения данной прямой и плоскости
5. $c \perp CB$	по условию
6. $c \perp B$	ссылка на определение прямой, перпендикулярной плоскости, пункты 4 и 5
7. $c \perp AC$,	т. к. $AC \in B$, a $c \perp B$

Аналогично доказывается обратное утверждение:

8. $c \perp AC$	по условию
9. $c \perp AC$	обосновано в 4-м шаге
10. $c \perp B$	8-й, 9-й шаги
11. $c \perp BC$	т. к. $BC \in B$, c/B

Теорема доказана полностью.

Другой вариант доказательства теоремы о трех перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

Доказать:

два взаимно-обратных предложения:

Дано:

плоскость L;

$AC \perp L$;

AB — наклонная;

CB — проекция наклонной;

$t \in L$, $t \perp CB$;

$t \perp AB$.

Доказательство:

1. $t \perp CB$ $AC \perp L$	по условию
2. $AC \perp t$	по определению: прямую и плоскость называют перпендикулярными, если прямая перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости
3. $t \perp$ плоскости (ABC),	т. к. t перпендикулярна двум пересекающимся прямым CB и AC, лежащим в плоскости (ABC), если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то та прямая перпендикулярна данной плоскости
4. $t \perp AB$	на сновании определения перпендикулярности прямой и плоскости из 3-го шага

Дано:

$t \in L$;

$t \perp AB$.

Доказать:

$t \perp CB$.

Доказательство:

1. $t \perp AB$ $AC \perp L$	по условию
2. $AC \perp t$	по определению перпендикулярности прямой и плоскости $t \in L$ по условию
3. $t \perp$ плоскости (ABC)	аналогично предшествующему шагу 3
4. $t \perp CB$	объяснение аналогично 4.

Теорема доказана полностью.

Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых

Теорема: **если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.**

Дано:

$a_1 \parallel a_2$;

плоскость $L \perp a_1$.

Доказать:

плоскость $L \perp a_2$.

Доказательство:

1. Плоскость $L \perp a_1$	условие
$a_1 \parallel a_2$	по построению
2. $a_2 \cap L = x_2$	
3. $x_2 \in L$	прямую X_2 провели через точку пересечения прямой
$X_2 \in L$	a_2 с плоскостью L
4. $a_1 \cap L = X_1$	$x_1 \in L$, причем $x_1 \parallel x_2$
5. $x_1 \in x_1$	т. к. по условию $a_1 \perp L$
6. $a_1 \perp x_1$	
7. $a_2 \perp x_2$	на основании теоремы: пересекающиеся прямые, соответственно, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

Вывод: $a_2 \perp x_2$, где x_2 — любая прямая, принадлежащая плоскости L, следовательно: $a_2 \perp L$.

Теорема доказана.

Две прямые, перпендикулярные плоскости

Теорема: две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Дано:

$a \perp L$;

$b \perp L$.

Доказать:

$a \parallel b$.

Доказательство: методом от противного

1. $a \nparallel b$	предположение
2. $C \in b$, $C \in L$	точка C выбрана произвольно
3. $b_1 \parallel a$	через точку C провели прямую b_1
4. $b_1 \perp L$	ссылка на теорему: если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой
5. $b \cap L = B$	прямые b и b_1 пересекаются с плоскостью L в точках
$b_1 \cap L = B_1$	B и B_1 соответственно
6. $BB_1 \perp b$	$BB_1 \in L$
$BB_1 \perp b_1$	по определению прямой, перпендикулярной плоскости
7. Но	
$b \cap b_1 = C$	по построению

Пришли к противоречию: прямая BB_1 одновременно перпендикулярна двум пересекающимся прямым, чего быть не может. Следовательно, наше предположение о том, что $a \nparallel b$, неверно.

Вывод: $a \parallel b$.

Перпендикулярные плоскости

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если какая-либо плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Теорема: если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Дано:
плоскость L;
$b \perp L$;
$b \in B$.
Доказать:
$L \perp B$.
Доказательство:

1. $b \cap L$	по построению
2. $K \in a$	в плоскости L построили прямую a, проходящую
$a \in L$	через точку K
3. $a \perp b$	по построению
4. $a \in B$,	через прямые a и b построили плоскость B
$b \in B$	
5. $L \perp b$	т. к. $a \perp b$

Теорема доказана.

Скрещивающиеся прямые

Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Дано:

a и b — скрещивающиеся прямые.

Доказать:

отрезок AB — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b, что он существует, единственен.

Докажем существование общего перпендикуляра:

1. Построим плоскость $L \parallel$ плоскости B $A \in L$, $b \in B$	через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой
2. $t \cap a$, $t \perp L$	t — любая прямая, пересекающая прямую a, T перпендикулярна плоскости L, $t \in p$ (таких прямых бесконечно много)
3. $p \cap B = a'$ $a \parallel a'$	т. к. плоскость $L \parallel$ плоскости B
4. $a' \cap b = B$	по построению
5. $AB \perp L$	по построению AB — это одна из бесконечного множества прямых, аналогичных прямой t
6. $AB \cap B$	т. к. $L \parallel B$

Вывод: отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей L и B, а, следовательно, и прямых a и b.

Докажем, что общий перпендикуляр — единственный (методом от противного).

1. ***Допустим***, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр	
2. $b' \parallel b$	
$C \in b'$	по построению, точнее допущению, CD — общий перпендикуляр к прямым a и B,
3. CD/b	
4. CD/b'	т. к. $b \parallel b'$
5. CD/a	по допущению
6. CD/L	по определению прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикуляром этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости
7. $CD \parallel AB$	т. к. AB тоже перпендикулярна плоскости L по построению построению, то расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измерено.

Вывод: параллельные прямые AB и CD задают плоскость, в которой должны лежать скрещивающиеся прямые AC и BD, что невозможно.

Итак, AB — единственный общий перпендикуляр.

Подведем итог: *расстоянием между скрещивающимися* называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Глава 3
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как для векторов на плоскости.

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется *нулевым* (рис. 166).

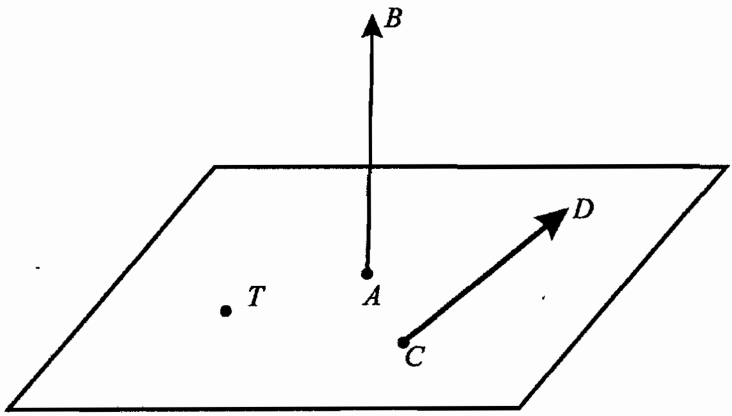


Рис. 166

Длиной ненулевого вектора AB называется длина отрезка AB. Длина вектора AB обозначается $|AB|$. Если два ненулевых вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они называются *коллинеарными.*

Если два ненулевых вектора коллинеарны и лучи, на которых лежат вектора, сонаправлены, то векторы называются *сонаправленными*, а если лучи не являются сонаправленными, векторы называются *противоположно направленными.*

Векторы называются *равными,* если они сонаправлены и длины их равны (рис. 167). Если точка A — начало вектора a, то вектор a *отложен* от точки A.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один.

Пусть a — данный вектор, B — данная точка (рис. 167).

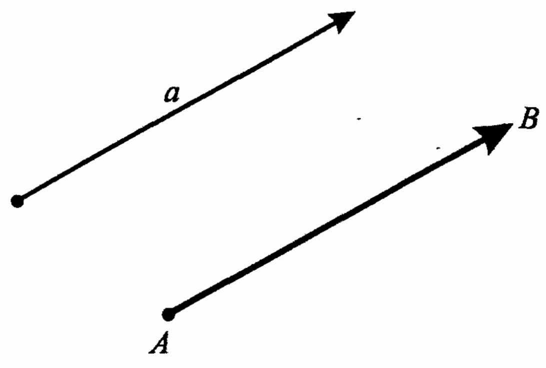


Рис. 167

Необходимо провести через начало и конец вектора a и точку B плоскость и в этой плоскости построить вектор $AB = a$. AB — искомый вектор. Из построения ясно, что вектор AB — единственный вектор с началом A, который равен вектору a.

Сложение и вычитание векторов

1. *Правило треугольника.* Для любых трех точек A, B, и C имеет место равенство $AB + BC = AC$ (рис. 168).

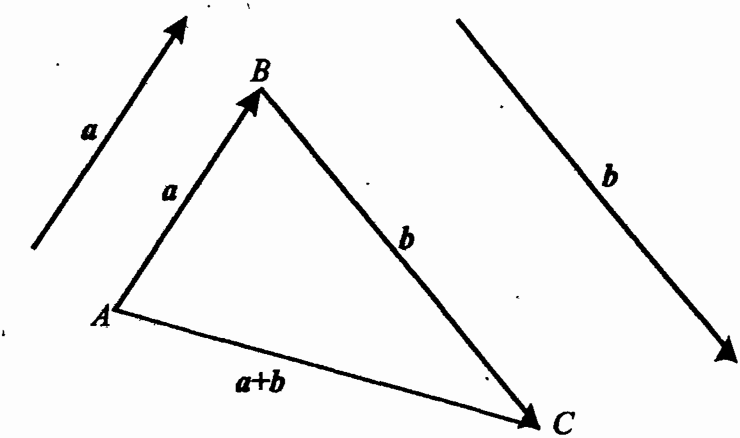


Рис. 168

2. *Правило параллелограмма* применяется для сложения двух неколлинеарных векторов (рис. 169).

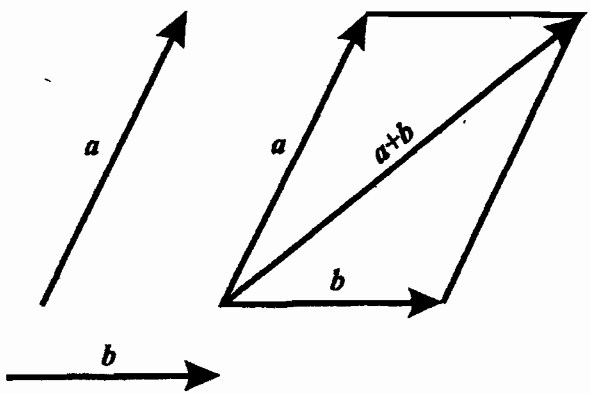


Рис. 169

Свойства сложения векторов

Для любых векторов a, b и c справедливы равенства:

$a + b = b + a$ — переместительный закон;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сочетательный закон.

Противоположными называются два ненулевых вектора, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Вектор BA является противоположным вектору AB.

Разностью векторов AC и AB называется вектор BC, сумма которого с вектором AB равна вектору AC.

Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, потом их сумма складывается с третьим вектором, и т. д.

3. *Правило многоугольника.* Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, то $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$.

Если точки A_1 и A_n, т. е. начало первого вектора и конец последнего совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору. Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 170 показано построение суммы трех векторов a, b, c.

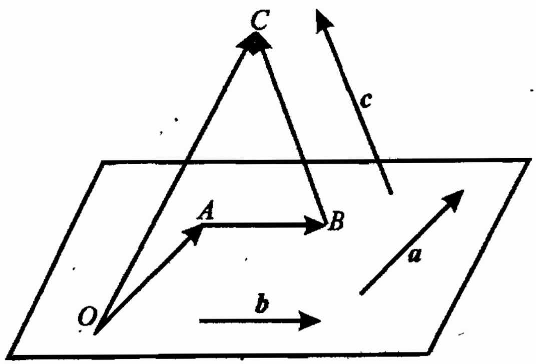


Рис. 170

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора a на число k называется вектор b, длина которого $|k|\cdot|a|$, векторы a и b сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любых векторов a и b, любых чисел k, n справедливо:

$(kn)\,a = k(na)$ — сочетательный закон;

$k(a + b) = ka + kb$ — первый распределительный закон;

$(k + n)\,a = ka + na$ — второй распределительный закон.

Деление коллинеарных векторов $\frac{a}{b} = k$, т. е. $a = kb$

Если векторы a и b коллинеарны и $a \neq 0$, то существует, и притом только одно, число k такое, что $a = kb$.

Доказательство:

Сначала докажем единственность:

$a = kb$, $|a| = |kb| = |k||b|$, следовательно, $|k| = \frac{|a|}{|b|}$, причем $|b| \neq 0$ т. к. $b \neq 0$

$|k| = \pm\frac{|a|}{|b|}$, «+» ставится, если вектора сонаправлены, и «−» — в противном случае.

Докажем существование $a = kb$ при данном k

$$|kb| = \left(\pm\frac{|a|}{|b|}\cdot b\right) = \frac{|a|}{|b|}\cdot b = |a|$$

Посмотрим, как направлен вектор kb по отношению к вектору a.

1. Если векторы a и b сонаправлены, то $k > 0$, векторы kb и b сонаправлены, но вектор b сонаправлен с вектором a, следовательно, векторы kb и a сонаправлены.

2. Если векторы a и b противоположно направлены, то $k < 0$, векторы kb и b противоположно направлены, но векторы a и b противоположно направлены, следовательно, векторы kb и a сонаправлены.

Значит, kb и a всегда сонаправлены, следовательно, $kb = a$.

Для неколлинеарных векторов отношение их длин существует, но оно не совпадает с отношением самих векторов.

Компланарные векторы

Компланарными называются векторы, если при откладывании их от одной точки они будут лежать в одной плоскости. На рисунке 171 изображены некомпланарные векторы a, b и c.

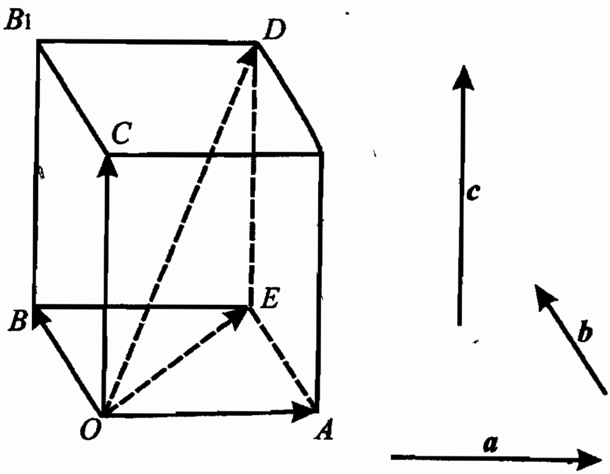


Рис. 171

Признак компланарности: если вектор c можно разложить по векторам a и b, т. е. представить в виде $c = xa + yb$, где x и y — любые числа, то векторы a, b и c являются компланарными.

Доказательство:

Пусть векторы a и b не коллинеарны (в противном случае компланарность очевидна). Отложим от точки O векторы $OA = a$ и $OB = b$ (рис. 172).

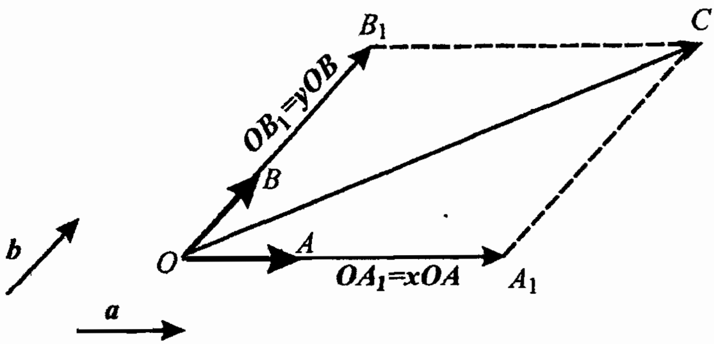


Рис. 172

Векторы OA и OB лежат в плоскости OAB. В этой же плоскости лежат векторы $OA_1 = xOA$ и $OB_1 = yOB$, сумма $OC = xOA + yOB$ равна вектору c. Следовательно, векторы a, b и c компланарны.

Справедливо обратное утверждение: если векторы a, b и c компланарны, а векторы a и b не коллинеарны, то вектор c можно разложить по векторам a и b, причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.

Правило параллелепипеда

Пусть a, b и c — некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $OA = a$,

$OB = b$, $OC = c$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были его ребрами (рис. 171).

$OD = OE + ED = (OA + AE) + ED = OA + OB + OC = a + b + c$.

Если вектор p представлен в виде $p = xa + yb + zc$, где x, y и z — некоторые числа, то вектор p разложен по векторам a, b, и c.

Теорема: любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство:

Пусть a, b, c — данные некомпланарные векторы. От произвольной точки O отложим векторы $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OP = p$. Через точку P проведем прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB. Через точку P_1 проведем прямую, параллельную прямой OB. Пусть точка P_2 — точка пересечения этой прямой с прямой OA. По правилу многоугольника:

$OP = OP_2 + P_2P_1 + P_1P$.

Векторы OP_2 и OA, P_2P_1 и OB, P_1P и OC коллинеарны, поэтому существуют числа x, y, z, такие, что $OP_2 = x\,OA$, $P_2P_1 = y\,OB$, $P_1P = z\,OC$. Получим:

$OP = x\,OA + y\,OB + z\,OC$.

Следовательно, $p = x\,a + y\,b + z\,c$.

Теперь необходимо доказать, что коэффициенты разложения определяются единственным образом. Пусть существует другое разложение вектора p: $p = x_1a + y_1b + z_1c$. Вычитая это равенство из предыдущего, получим:

$0 = (x - x_1)a + (y - y_1)b + (z - z_1)c$.

Это равенство выполняется только тогда, когда $x - x_1 = 0$ и т. д. Следовательно, коэффициенты разложения определяются единственным образом. Теорема доказана.

Метод координат в пространстве

Три попарно перпендикулярные прямые x, y, z, которые пересекаются в одной точке O, называются *прямоугольной системой координат в пространстве*. Прямые называются *осями координат*, точка — *началом координат*; плоскости, которые проходят через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются соответственно *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

Точка O разбивает каждую из координатных осей на два луча. *Положительной полуосью* называется луч, направление которого совпадает с направлением оси, а другой луч — отрицательной полуосью.

Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел, которые называются ее *координатами*. Координаты точек в пространстве определяются так же, как и на плоскости.

На каждой из положительных полуосей откладывается от начала координат единичный вектор, т. е. его длина равна единице. Векторы i, j, k называются *координатными* векторами (рис. 173).

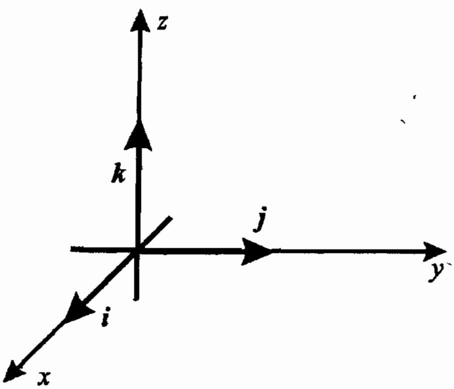


Рис. 173

Эти векторы некомпланарны. Поэтому любой вектор a можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде: $a = xi + yj + zk$, причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом. Коэффициенты x, y, z в разложении вектора a по координатным векторам называются *координатами вектора* a в данной системе координат. Координаты вектора a записываются в круглых скобках после обозначения вектора: $a\ (x;\ y;\ z)$. Все координаты нулевого вектора равны нулю. Координаты равных векторов соответственно равны.

1. *Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.* Если $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — данные векторы, то вектор $a + b$ имеет координаты: $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.

2. *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.* Если $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — данные векторы, то вектор $a - b$, имеет координаты: $(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$.

3. *Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на число.* Если $a(x;\ y;\ z)$ — данный вектор, α — данное число, то вектор αa имеет координаты $(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$.

Пример

Найти координаты вектора $p = 3a + \frac{1}{2}b - c$, если $a(1;\ 0;\ -2)$, $b(0;\ 4;\ 6)$, $c(-3;\ 4;\ 1)$.

Решение:

По утверждению 3-му вектор $3a$ имеет координаты $(3;\ 0;\ -6)$, вектор $\frac{1}{2}b$ — координаты $(0;\ 2;\ 3)$. Поскольку вектор $p = 3a + \frac{1}{2}b - c$, то его координаты вычисляются по 1-му утверждению: $x = 3 + 0 - (-3) = 6$, $y = 0 + 2 - 4 = -2$, $z = -6 + 3 - 1 = -4$. p имеет координаты $(6;\ -2;\ -4)$.

Условие коллинеарности двух ненулевых векторов a и b имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

где a имеет координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, b имеет координаты $(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Пример

Дан вектор $a(2;\ 1;\ 3)$. Найти коллинеарный ему вектор c началом в точке $A(1;\ 1;\ 1)$ и концом в точке B на плоскости Oxy.

Решение:

Координата z точки B равна 0. Координаты вектора AB: $x - 1$, $y - 1$, $0 - 1 = -1$. Поскольку a и AB коллинеарны, то получаем следующие соотношения:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{-1}{3}.$$

Решив уравнения, получим $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, т. е. AB имеет координаты $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 0\right)$.

Радиус-вектором данной точки называется вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с данной точкой. Координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

Выражение координат вектора через координаты его начала и конца

Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, точка B — координаты $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Вектор AB можно выразить как разность векторов OB и OA (рис. 174), значит, его координаты равны разностям соответствующих координат векторов OB и OA по утверждению 2.

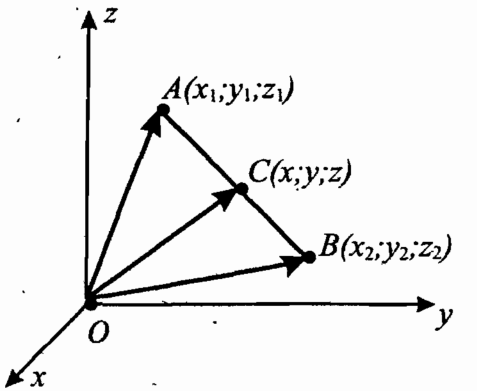


Рис. 174

Но координаты векторов совпадают с соответствующими координатами точек B и A. Потому вектор AB имеет координаты $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$. Следовательно, *каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.*

Координаты середины отрезка

Рассмотрим рисунок 174. Выразим координаты середины C отрезка AB через координаты его концов. Поскольку точка C — середина AB, то $OC = \frac{1}{2}(OA + OB)$. Запишем это равенство в координатах: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = (y_1 + y_2)$, $z = (z_1 + z_2)$. Таким образом, *каждая координата середины отрезка равна половине суммы соответствующих координат его концов.*

Вычисление длины вектора по его координатам.

Отложим на осях координат векторы $OA_1 = xi$, $OA_2 = yj$, $OA_3 = zk$ и рассмотрим вектор $OA = OA_1 + OA_2 + OA_3 = xi + yj + zk = a$ (рис. 175).

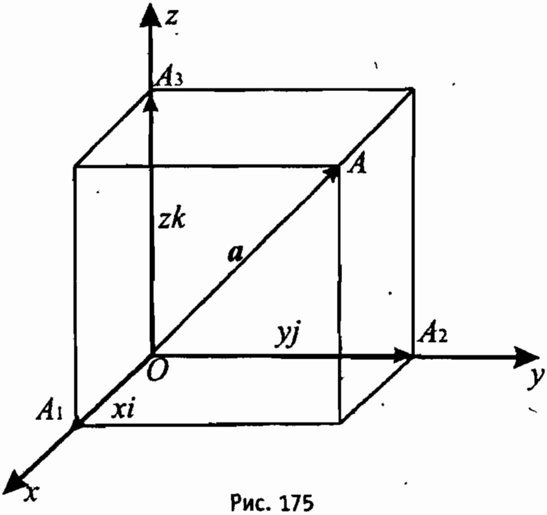


Рис. 175

Длина вектора OA выражается следующим образом:

$|OA| = \sqrt{|OA_1^2| + |OA_2^2| + |OA_3^2|}$, т. к. справедливо свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. $|OA_1| = |xi| = |x|$, $|OA_2| = |y|$, $|OA_3| = |z|$ и $OA = a$, то получим формулу:

$$|a| = \sqrt{|x^2| + |y^2| + |z^2|} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Длина вектора $a(x;\ y;\ z)$ вычисляется по формуле $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Расстояние между двумя точками

Даны две произвольные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты. Координаты вектора M_1M_2 равны $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$. Длина вектора $|M_1M_2| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$.

Но $d = |M_1M_2|$. Следовательно, *расстояние между точками* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *вычисляется по формуле:*

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}.$$

Скалярное произведение векторов

Пусть дано два вектора a и b. Отложим от точки O векторы $OB = b$ и $OA = a$. Если a и b не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 176).

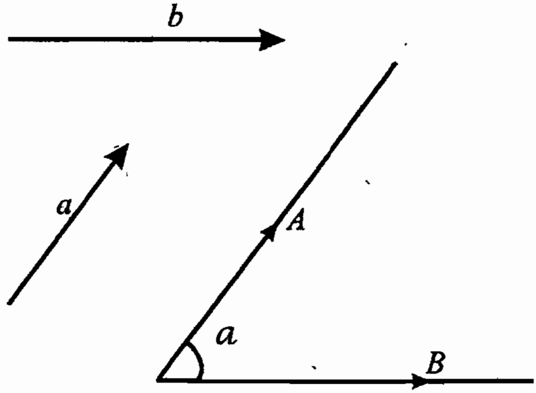


Рис. 176

Градусная мера этого угла обозначается α, т. е. *угол между векторами a и b равен* α. Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°. Векторы называются *перпендикулярными*, если угол между векторами равен 90°. Угол между векторами a и b обозначается a^b.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается ab.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Скалярное произведение вектора на себя (т. е. скалярный квадрат) равен квадрату его длины.

Скалярное произведение векторов $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в координатах выражается формулой: $ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Поскольку $ab = |a| \cdot |b| \cos \alpha$, то $\cos \alpha = \dfrac{ab}{|a| \cdot |b|}$. Выразим это равенство в координатах и получим: косинус угла α между ненулевыми векторами $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)} \cdot \sqrt{\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)}}.$$

Свойства скалярного произведения векторов.

1. $a^2 \geq 0$, где $a^2 > 0$ при $a \neq 0$.
2. $ab = ba$ — переместительный закон.
3. $(a + b)c = ac + bc$ — распределительный закон.
4. $\kappa(ab) = (\kappa a)b$ — сочетательный закон.

Пример

Даны точки $A\ (0;\ 2;\ 3)$, $B\ (1;\ -3;\ -1)$, $C\ (2;\ 0;\ 1)$, $D\ (3;\ 1;\ 0)$. Найти косинус угла α между векторами AB и CD.

Решение:

Координаты вектора AB: $1 - 0 = 1$, $-3 - 2 = -5$, $-1 - 3 = -4$.

$$|AB| = \sqrt{\left(1^2 + (-5)^2 + (-4)^2\right)} = \sqrt{42}.$$

Координаты вектора CD: $3 - 2 = 1$, $1 - 0 = 1$, $0 - 1 = -1$.

$$|CD| = \sqrt{\left(1^2 + 1^2 + (-1)^2\right)} = \sqrt{3}.$$

$$\cos\alpha = \frac{AB \cdot CD}{|AB| \cdot |CD|} = \frac{1 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 1}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-8}{\sqrt{126}}.$$

Координаты ненулевого вектора в прямоугольной системе координат равны $|a|\cos\alpha_1$; $|a|\cos\alpha_2$; $|a|\cos\alpha_3$, где α_1 — угол между векторами a и i, α_2 — угол между a и j, α_3 — угол между a и k.

Доказательство:

Пусть вектор a имеет координаты $(x; y; z)$, тогда $a = xi + yj + zk$. Умножим это равенство скалярно на i: $ai = (xi + yj + zk)\, i = x(ii) + y(ji) + z(ki)$. Поскольку $ii = 1$, $ji = 0$, $ki = 0$, то $ai = x$.

Но по определению скалярного произведения $ai = |a||i|\cos\alpha_1 = |a|\cos\alpha_1$. Таким образом, $x = |a|\cos\alpha_1$. Аналогично получаются равенства, $y = |a|\cos\alpha_2$, $z = |a|\cos\alpha_3$.

Направляющий вектор прямой а — это ненулевой вектор, лежащий на прямой a или на прямой, параллельной a.

Пример

Найти угол между двумя прямыми (скрещивающимися или пересекающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

Решение:

Пусть $a(x_1; y_1; z_1)$ и $b(x_2; y_2; z_2)$ — направляющие векторы прямых m и n, и α — искомый угол между этими прямыми.

Обозначение: $\beta = a \wedge b$. Тогда возможны два варианта:

1) $\alpha = \beta$, если $\beta \le 90°$, тогда $\cos\alpha = \cos\beta$;

2) $\alpha = 180° - \beta$, если $\beta > 90°$, тогда $\cos\alpha = -\cos\beta$.

В любом случае $|\cos\alpha| = |\cos\beta|$, а т. к. $\alpha \le 90°$, то $\cos\alpha \ge 0$, следовательно, $\cos\alpha = |\cos\beta|$ и

$$\cos\alpha = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}.$$ Значение $\cos\alpha$ позволяет найти угол α.

Глава 4
МНОГОГРАННИКИ

Точка A называется *граничной точкой* данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая ее саму) есть точки, как принадлежащие фигуре F, так и не принадлежащие ей. *Границей* называется множество всех граничных точек фигуры. *Внутренней точкой* фигуры называется точка фигуры, которая не является граничной. Фигура называется *ограниченной*, если ее можно заключить в сферу. Фигура называется *связной*, если любые две ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическое тело — это ограниченная связная фигура в пространстве, которая содержит все свои граничные точки. Границу тела называют его *поверхностью*.

Плоскость называется *секущей* плоскостью, если по обе стороны от нее имеются точки данного геометрического тела. Фигура, образующаяся при пересечении тела с плоскостью, называется *сечением тела*.

Двугранный угол — это фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей.

Полуплоскости называются *гранями*, а общая граница — *ребром двугранного угла*. Плоскость, которая перпендикулярна ребру двугранного угла, пересекает грани по двум полупрямым. Угол, который образован этими полупрямыми, называется *линейным углом двугранного* угла.

Двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов. Все линейные углы одного двугранного угла равны между собой. Докажем это утверждение. Из бесконечного множества углов выберем два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 177).

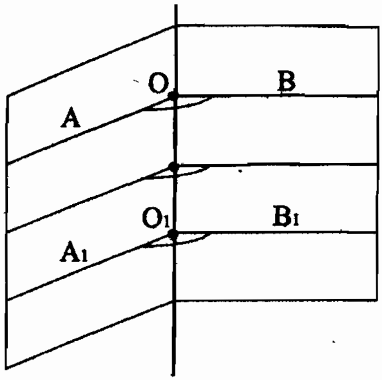


Рис. 177

Рассмотрим лучи OA и O_1A_1. они лежат в одной грани и перпендикулярны прямой OO_1, следовательно, лучи OA и O_1A_1 сонаправлены. Аналогично, сонаправлены лучи OB и O_1B_1. Поэтому $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — это углы с сонаправленными сторонами.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

Перейдем к рассмотрению многогранников.

Многогранником называется поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. *Гранями* многогранника называются многоугольники, из которых составлен многогранник. *Стороны* граней называются ребрами, а концы ребер называются *вершинами многогранника*. *Диагональ* многогранника — это отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани. Примеры многогранников — тетраэдр, параллелепипед, октаэдр, призма, пирамида.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Выпуклый многогранник расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

Призма

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 178).

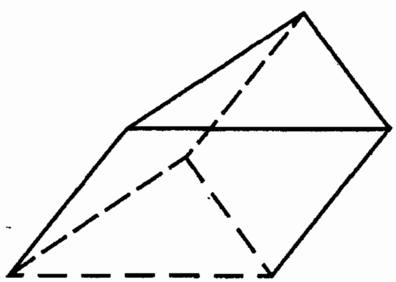


Рис. 178

Многоугольники называются *основаниями* призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, — *боковыми ребрами* призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярные основаниям. В противном случае призма называется *наклонной.*

Прямая призма называется *правиьной*, если ее основание являются правильными многоугольниками.

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности.

Боковая поверхность состоит из параллелограммов.

Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.

Пример

Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $5\sqrt{2}$ см.

Решение:

Поскольку призма является правильной, следовательно, прямой, значит, ее основания — квадраты, $b \perp a$, но $a \parallel c$ и $a = c$ по условию, значит, сечение $abcd$ является прямоугольником (рис. 179).

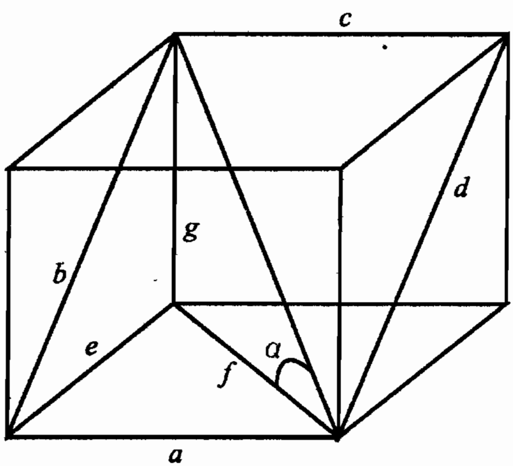


Рис. 179

$S_{осн} = ab$.

По теореме Пифагора для Δaef: $a^2 + e^2 = f^2$.

$2a^2 = f^2$; подставим значения и получим, что $a = 5$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник, сторонами которого является диагональ основания и диагональ призмы: $\operatorname{tg} \alpha = g/f$, значит, $g = \operatorname{tg} 60° \, 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ см.

По теореме Пифагора $b = \sqrt{(e^2 + g^2)} = 5\sqrt{7}$ см; $S_{осн} =$ $= 5 \cdot 5\sqrt{7} = 25\sqrt{7}$ см^2.

Ответ: $25\sqrt{7}$ см^2.

Параллелепипед

Если основания призмы есть параллелограммы, то она называется *параллелепипедом.*

У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими.*

По аналогии с призмой параллелепипед различают прямой и наклонный.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.*

У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом.*

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами.* У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера. Сформулируем и докажем теорему: диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Дано:
$A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ — параллелепипед;
A_4A_2' и A_1A_3' — его диагонали.
Доказать:
$A_4A_2' \cap A_1A_3' = O$, причем $A_2'O = OA_4$ и $A_{10} = OA_3'$.
Доказательство:

1. Четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм	по определению параллелепипеда
2. $A_2'A_2A_3A_3'$ — параллелограмм	аналогично
3. A_2A_3 — общая сторона	указанных параллелограммов
4. $A_1A_4 \parallel A_2'A_3'$	по свойству транзитивности для отношения параллельности: $A_1A_4 \parallel A_2A_3$ и $A_2'A_3' \parallel A_2A_3$

5. Параллельные прямые A_1A_4 и A_2A_3 задают плоскость, которая пересекает противолежащие грани параллелепипеда по параллельным прямым $A_1A_2' \parallel A_4A_3'$

6. Четырехугольник $A_4A_1A_2'A_3'$ — параллелограмм	по определению параллелограмма
7. $A_1A_3' \cap A_4A_2' = O$, причем $A_1O = OA_3'$ и $A_4O = OA_2'$	свойство диагоналей параллелограмма

8. Аналогичные рассуждения можно провести для второй пары диагоналей параллелепипеда.

Вывод: все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Следствие.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Сформулируем и докажем теорему о противолежащих гранях параллелепипеда: у параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Дано:

параллелепипед;

$A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$.

Доказать:

грань $A_1A_2A_2'A_1'$ = грани $A_3A_4A_3'A_4'$;

грань $A_1A_2A_2'A_1'$ = грани $A_3A_4A_3'A_4'$.

Доказательство:

1. $A_1A_2 \parallel A_3A_4$	т. к. все грани параллелепипеда — параллелограммы, в частности грань $A_1A_2A_3A_4$
2. $A_1A_1' \parallel A_4A_4'$	аналогично $A_1A_4A_1'A_4'$ — параллелограмм

Вывод: грань $A_1A_2A_2'A_1' \parallel$ грани $A_3A_4A_3'A_4'$ обоснование: две *плоскости параллельны, если одна из них параллельна* двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

3. $A_1A_4 = A_2A_3$	то следует из того, что грани параллелепипеда — параллелограммы
$A_1A_4 \parallel A_2A_3$ и т. д.	поэтому все соответствующие отрезки параллельны и равны
4. Грань $A_1A_2A_2'A_1' \to$ $\to Ta_1b_4$ Грань $A_3A_4A_4'A_3'$	выполнен параллельный перенос на отрезок A_1A_4, при этом грани совместятся, т. к. *в 3-м шаге* мы доказали, что все соответствующие отрезки равны и параллельны.

Вывод: грань $A_1A_2A_2'A_1'$ = грани $A_3A_4A_4'A_3'$, т. к. параллельный перенос сохраняет расстояние и переводит фигуру в равную ей фигуру.

Аналогично можно провести рассуждения и доказать равенство и параллельность двух других противолежащих граней.

Сформулируем и докажем теорему о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда.

В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров.

Дано:

$ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед.

Доказать:

$(AC')^2 = (AA')^2 + AD^2 + AB^2$.

Доказательство:

1. Из $\Delta ACC'$,	
где $\angle C'CA = 90°$	
$(AC')^2 = (CC')^2 + AC^2$	по теореме Пифагора
2. Из ΔACB,	
где $\angle ABC = 90°$	
$AC^2 = AB^2 + BC^2$	по теореме Пифагора
3. $(AC')^2 = (CC')^2 + AB^2 + BC^2$	подставили равенство 2 в равенство 1.

Теорема доказана, т. к. ребра CC', AB и BC не параллельны, то они являются линейными размерами параллелепипеда.

Пример

Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 144 см. Найти каждое ребро параллелепипеда, если $AB/BC = 3/4$, $BC/BB_1 = 4/5$.

Решение:

Введем x — коэффициент пропорциональности. $AB = 3x$; $BC = 4x$; $BB_1 = 5x$;

Все грани параллелепипеда являются параллелограммами, а противолежащие стороны параллелограмма равны, следовательно, получим следующее уравнение:

$4AB + 4BC + 4BB_1 = 144$; $12x + 16x + 20x = 144$; $48x = 144$; $x = 3$; $AB = 9$ см; $BC = 12$ см; $BB_1 = 15$ см.

Ответ: 9 см; 12 см; 15 см.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано $D_1B = m$, $AC = n$, $AB = k$ найти расстояние между:

1) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC;

2) плоскостями ABB_1 и DCC_1;

3) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

Решение:

1. Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то $AA_1 \perp ABCD$, следовательно, $AA_1 \perp ABC$, значит, AA_1 — расстояние между A_1C_1 и плоскостью ABC. Из прямоугольного ΔABC по теореме Пифагора следует, что $BC^2 = AC^2 - AB^2 = n^2 - k^2$. По теореме о диагонали прямоугольного параллелепипеда $D_1B^2 = AA_1^{\,2} + AB^2 + BC^2$; подставим в полученное равенство значения: $AA_1 = \sqrt{(m^2 - n^2)}$.

2. По свойству прямоугольного параллелепипеда B_1C_1 — расстояние между гранями $B_1C_1 = \sqrt{(n^2 - k^2)}$.

3. Из подобия ΔDOC и ΔADC: $\dfrac{DO}{AD} = \dfrac{DC}{AC}$, следовательно, $DO = \dfrac{AD \cdot DC}{AC} = \dfrac{k\sqrt{(n^2 - k^2)}}{n}$.

Ответ: a) $\sqrt{(m^2 - n^2)}$; b) $\sqrt{(n^2 - k^2)}$; c) $\dfrac{k\sqrt{(n^2 - k^2)}}{n}$.

Пирамида

Рассмотрим пирамиду по следующему плану: определение, элементы пирамиды, теорема о плоскости, параллельной основанию пирамиде и пересекающей ее.

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами*.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней.

Каждая боковая грань — треугольник.

Одной из вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной — сторона основания пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *n-угольной*, если ее основанием является n-угольник.

Треугольная пирамида также называется *тетраэдром* (рис. 180).

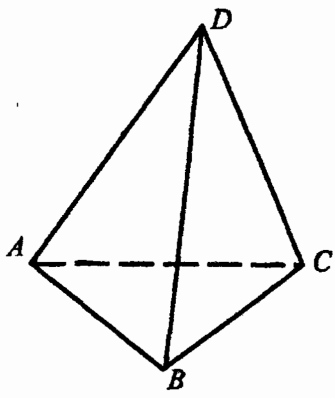


Рис. 180

Правильный тетраэдр — это тетраэдр, ребра которого равны. Тетраэдр имеет четыре вершины, четыре грани и шесть ребер. *Противоположными ребрами* тетраэдра называются два ребра, не имеющие общих вершин.

Тетраэдр называется *ортоцентрическим,* если прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке.

Свойства ортоцентрического тетраэдра

1. Каждые два его противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

2. Если один из плоских углов при любой вершине тетраэдра — прямой, то и два других плоских угла являются прямыми.

3. Любая его вершина проецируется в ортоцентр противоположной грани (*ортоцентром* называется точка пересечения прямых, содержащих высоты грани).

4. Суммы квадратов длин противоположных ребер равны.

Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны.

Правильная пирамида — это пирамида, основание которой — правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр ее основания.

Теорема: все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $ABCDP$ (рис. 181).

Сначала необходимо доказать, что все боковые ребра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим катетом является радиус R окружности, которую можно

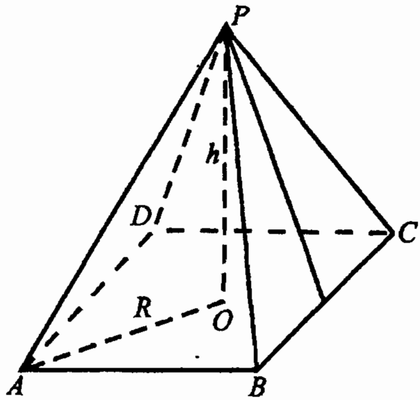


Рис. 181

описать вокруг основания. По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{(h^2 + R^2)}$, поэтому $PA = PB = PC = PD$.

Итак, все боковые ребра равны друг другу, следовательно, боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, т. к. основанием правильной пирамиды является квадрат, следовательно, по третьему признаку равенства треугольников боковые грани равны, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*. Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

1. Если в пирамиде выполняется одно из следующих условий:

1) все боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы;

2) длины всех апофем боковых граней равны, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, *вписанной* в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

2. Если в пирамиде выполняется одно из следующих условий:

1) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;

2) длины всех боковых ребер равны, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, *описанной* около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения срединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

Пример

Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 4 см, а одна из диагоналей равна 6 см. Необходимо найти боковые ребра пирамиды, если ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 8 см.

Решение:

Пусть $AC = 6$ см (рис. 182).

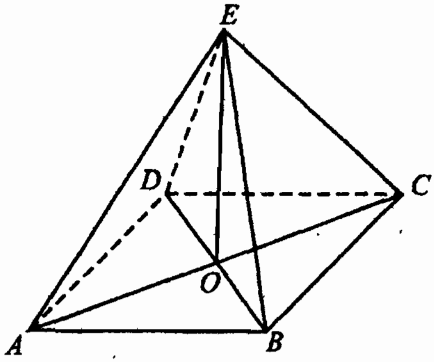


Рис. 182

$AO = AC/2$ по свойству диагоналей ромба, значит, $AO = 3$ см.

По теореме Пифагора $AE = \sqrt{\left(AO^2 - EO^2\right)} = \sqrt{73}$ см.

Диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, ΔAOB прямоугольный, по теореме Пифагора

$$BO = \sqrt{(AB^2 - AO^2)} = \sqrt{7} \text{ см};$$

$$BE = \sqrt{(BO^2 + EO^2)} = \sqrt{71} \text{ см};$$

$$CE = \sqrt{(EO^2 + CO^2)} = \sqrt{73} \text{ см};$$

$$ED = \sqrt{(DO^2 + EO^2)} = \sqrt{71} \text{ см}.$$

Ответ: $\sqrt{73}$ см; $\sqrt{71}$ см; $\sqrt{73}$ см; $\sqrt{71}$ см.

Теорема: плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.

Дано:

$SABC$ — пирамида;

Плоскость $A'B'C' \parallel$ плоскости ABC.

Доказать:

пирамида $SA'B'C'$ подобна пирамиде $SABC$.

Доказательство

1. Плоскость $A'B'C' \cap$ $\cap\, SA = A'$	по построению
2. Подвергнем пирамиду SA' $SABC$ преобразованию гомотетии	
3. Плоскость $ABC \to$ $\to$ плоскость $A'B'C'$	точка $A \in$ плоскости $A'B'C'$ плоскость $ABC \parallel$ плоскости $A'B'C'$

Вывод: $A'B'C'$ секущая плоскость, $SA'B'C'$ — отсекаемая этой плоскостью часть пирамиды $SABC$, пирамида $SA'B'C'$ подобна пирамиде $SABC$, т. к. гомотетия есть преобразование подобия, т. е. отсекаемая часть пирамиды есть пирамида, подобная данной.

Усеченная пирамида — часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 183).

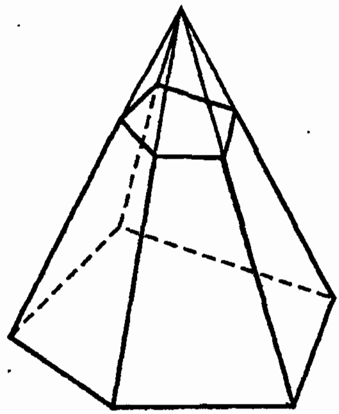


Рис. 183

Боковыми гранями являются трапеции.

Высотой усеченной пирамиды является перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого основания. Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани являются равнобедренными трапециями. Высоты этих трапеций называются *апофемами*.

Пример

Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 320 см^2. Найти площади сечений.

Решение:

Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур соотносятся как квадраты их линейных размеров. Следовательно, отношения площадей сечений к площади основания пирамиды есть $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{2}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Поэтому площади сечений равны $320 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 20$ см^2, $320 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 80$ см^2, $320 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 180$ см^2.

Ответ: 20 см^2, 80 см^2, 180 см^2.

Симметрия в пространстве

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O*, если O — середина отрезка AA_1. Точка O называется *центром симметрии*. Точка O симметрична сама себе. Точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой a*, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна отрезку AA_1. Прямая a называется *осью симметрии*. Каждая точка прямой a симметрична сама себе.

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно плоскости α*, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна отрезку AA_1. Плоскость α называется *плоскостью симметрии*. Каждая точка плоскости α симметрична сама себе.

Точка (прямая, плоскость) называется *центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры*, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее какой-либо точке этой фигуры. Фигура обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией, если она имеет центр (ось, плоскость) симметрии. У фигуры может быть один или несколько центров (осей, плоскостей) симметрии. Существуют фигуры, которые имеют бесконечно много центров (осей, плоскостей) симметрии. Такими фигурами являются прямая и плоскость. Существуют также фигуры, не имеющие ни центров, ни плоскостей, ни осей симметрии. Например, у тетраэдра нет центра симметрии.

Элементами симметрии многогранника называются центр, оси и плоскости симметрии.

Правильный многогранник

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, если все его грани являются равными правильными многоугольниками, и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Все ребра правильного многогранника равны между собой. Все двугранные углы, которые содержат две грани с общим ребром, также равны между собой. Пример правильного многогранника — куб, т. к. все его грани — равные квадраты, в каждой вершине сходится три ребра.

Не существует правильного многогранника, гранями которого являются n-угольники при $n \geq 6$.

Доказательство:

При каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов, но угол правильного n-угольника при $n \geq 6$ не меньше 120°, поэтому если существует правильный многогранник, гранями которого являются правильные n-угольники при $n \geq 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника будет не менее чем $120° \times 3 = 360°$, но сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника менее 360°. Приходим к противоречию, следовательно, такого правильного многогранника не существует.

Существуют следующие правильные многогранники.

1. *Правильный тетраэдр.* Составлен из четырех равносторонних треугольников. В каждой вершине тетраэдра сходится три ребра. Следовательно, при каждой вершине сумма плоских углов равна 180°. Не имеет центра симметрии, но у него есть три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии, причем каждая проходит через ребро и середину противоположного ребра.

2. *Правильный октаэдр.* Составлен из восьми равносторонних треугольников. В каждой вершине сходится четыре ребра. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 240°. Имеет центр симметрии, девять осей симметрии и несколько плоскостей симметрии.

3. *Правильный икосаэдр.* Составлен из двадцати равносторонних треугольников. В каждой вершине сходится пять ребер. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 300°. Имеет несколько осей и плоскостей симметрии и центр симметрии.

4. *Куб.* Составлен из шести квадратов. В каждой вершине куба сходится три ребра. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270°. Центром симметрии куба является точка пересечения его диагоналей. Куб имеет девять плоскостей симметрии и девять осей симметрии, причем все оси симметрии проходят через центр симметрии.

5. *Правильный додекаэдр.* Составлен из двенадцати правильных пятиугольников. В каждой вершине сходится три ребра. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°. Имеет центр симметрии, несколько осей и плоскостей симметрии.

9. Зак. 258

Пример

Найти двугранные углы правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a.

Решение:

Проведем из вершины O тетраэдра высоты OA, OB, OC граней и высоту OH тетраэдра (рис. 184).

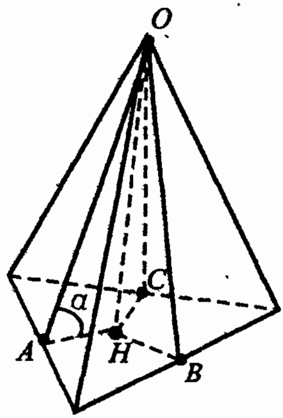


Рис. 184

$OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из равенства высот следует равенство отрезков HA, HB, HC. А они перпендикулярны сторонам треугольника в основании тетраэдра. Значит, точка H является центром окружности, которая вписана в основание тетраэдра. Следовательно, $HA = HB = HC = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Пусть α — двугранный угол при ребре, которое содержит точку A. Тогда $\cos\alpha = \frac{AH}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Косинус угла α позволяет найти угол $\alpha = 70°32'$. Остальные двугранные углы такие же по величине.

Ответ: $70°32'$.

Глава 5
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр

Цилиндром называется тело, состоящее из двух кругов, которые совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих точки этих кругов. Круги называются *основаниями* цилиндра, а отрезки — *образующими* цилиндра (или цилиндрической поверхности) (рис. 185).

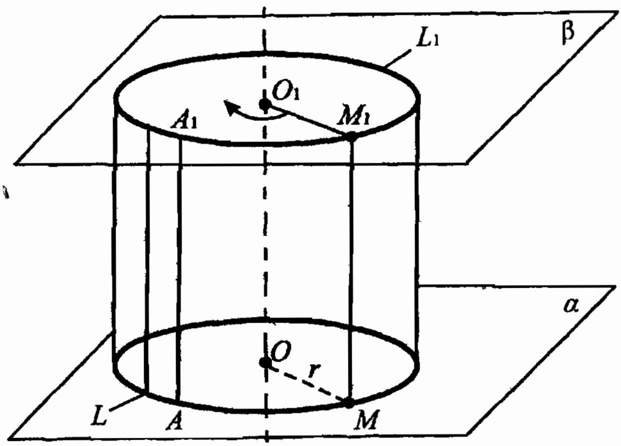


Рис. 185

Поскольку параллельный перенос — движение, то основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях.

Образующие цилиндра параллельны и равны (по свойству параллельного переноса). Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из образующих. *Радиусом* цилиндра называется радиус основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований, т. е. длина образующей. *Осью* цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Ось параллельна образующим.

Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон. Образующие перпендикулярны к плоскостям оснований.

Рассмотрим сечения цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является прямоугольником, две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. Прямоугольником является осевое сечение, т. е. сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

Пример

Осевое сечение цилиндра является квадратом, площадь которого равна a. Найти площадь основания цилиндра.

Решение:

Если площадь квадрата a, то его сторона равна $\sqrt{a}$. Сторона квадрата равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi a}{4}$.

Теорема: плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Доказательство:

Пусть β — плоскость, параллельная плоскости α основания цилиндра (рис. 186).

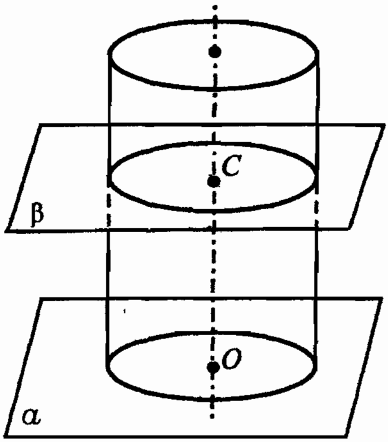


Рис. 186

Она отсекает от данного цилиндра тело, которое является цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых есть сечение. Теорема доказана.

Призмой, вписанной в цилиндр, называется призма, плоскости оснований которой являются плоскостями оснований цилиндра, а боковые ребра — образующие цилиндра (рис. 187).

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, плоскости оснований которой являются плоскостями оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра.

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, которая проходит через образующую цилиндра и перпендикулярна плоскости осевого цилиндра, в которой содержится эта образующая (рис. 188).

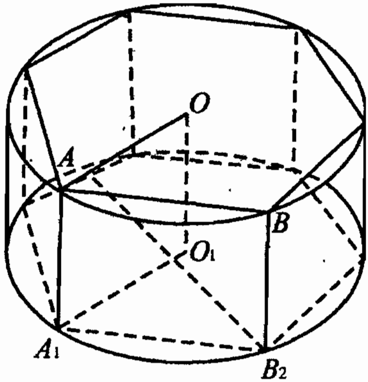


Рис. 187

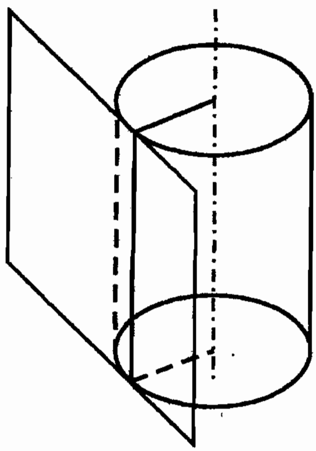


Рис. 188

Пример

Правильная шестиугольная призма вписана в цилиндр. Радиус основания равен высоте цилиндра. Найти угол между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра.

Решение:

Сторона A_1B_2 правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу O_1A_1 (рис. 187). Следовательно, боковые грани призмы являются квадратами. Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю AB_2 и осью цилиндра OO_1 равен углу A_1AB_2. Поскольку грани — квадраты, то $\angle A_1AB_2 = 45°$.

Ответ: 45°.

Конус

Конусом называется тело, состоящее из круга, точки, которая не принадлежит плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих эту точку с точками круга. Круг называется ***основанием*** конуса, точка — ***вершиной*** конуса, отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются ***образующими*** конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Высотой конуса называется перпендикуляр, проведенный из вершины конуса на плоскость основания.

Прямым круговым конусом называется фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. ***Осью*** прямого кругового конуса называется прямая, которая проходит через центр основания и вершину конуса (рис. 189*а*).

Рассмотрим сечения конуса.

Сечение конуса плоскостью, которая проходит через вершину конуса, является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — образующие конуса.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение также является равнобедренным треугольником, основание которого — диаметр основания конуса. Такое сечение называется ***осевым***.

Пример

Найти высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 8 см^2, а площадь основания равна 10 см^2.

Решение:

Основанием конуса является круг, а осевым сечением — ΔABC (рис. 189*б*).

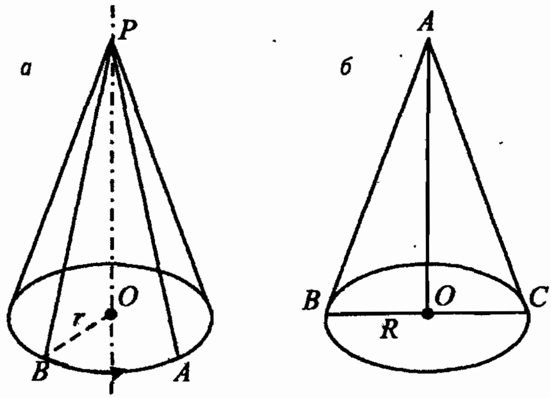


Рис. 189

Площадь круга вычисляется по формуле $S_{осн} = \pi R^2$. Найдем радиус основания $R = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$. Площадь ΔABC вычисляется по формуле $S = 2S_{AOB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot BO = HR$. Подставим полученные значения в формулу и выразим H: $H = \frac{S}{R} = 8\sqrt{\frac{\pi}{10}}$ см.

Ответ: $8\sqrt{\frac{\pi}{10}}$ см.

Теорема: плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Доказательство:

Пусть α — плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая конус (рис. 190).

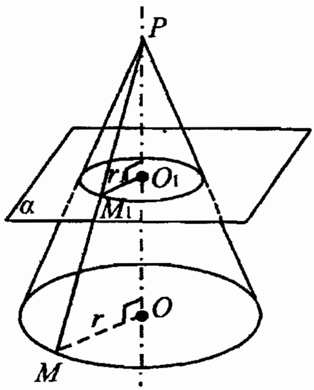


Рис. 190

M — точка пересечения луча PM_1 с плоскостью основания конуса. Треугольники PO_1M_1 и POM подобны, т. к. они прямоугольны и имеют общий острый угол P. $OM = \frac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1} r_1 = r$, т. е. точка M лежит на окружности основания конуса. Следовательно, отрезок PM является образующей конуса.

Из подобия этих же прямоугольных треугольников следует, что $O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} r = r_1$ окружность радиуса r_1 с центром O_1 является сечением боковой поверхности конуса плоскостью α, поэтому круг, границей которого является эта окружность, представляет собой сечение конуса плоскостью α. Теорема доказана.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом*. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются *основаниями усеченного конуса*, а отрезок, соединяющий их центры, — *высотой усеченного конуса*, отрезки, заключенные между основаниями, — *образующими усеченного конуса*. Все образующие усеченного конуса равны друг другу.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям (рис. 191).

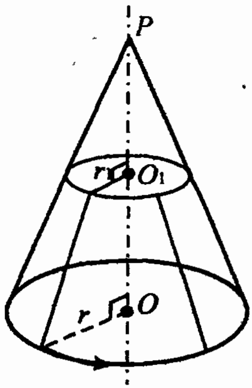


Рис. 191

Пирамидой, вписанной в конус, называется пирамида, основанием которой является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной — вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса (рис. 192).

Пример

Все боковые ребра пирамиды равны. Докажем, что она вписана в некоторый конус.

Решение:

Пусть SO — перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 192).

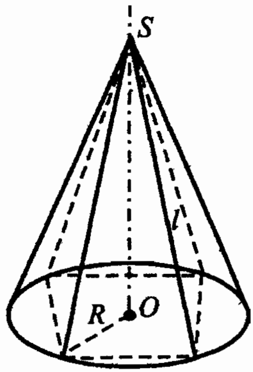


Рис. 192

Длину боковых ребер можно обозначить l. Вершины основания удалены от точки O на одно и то же расстояние $R = \sqrt{\left(l^2 - OS^2\right)}$. Следовательно, пирамида вписана в конус, вершиной которого является вершина пирамиды, а основание — круг с центром O и радиусом R.

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, которая проходит через образующую конуса перпендикулярно плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, основанием которой является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 193).

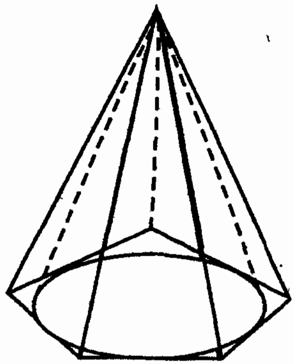


Рис. 193

Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

Шар

Шар — это тело, состоящее из всех точек пространства, которые находятся на данном расстоянии R от данной точки O (рис. 150). Данная точка O называется *центром* шара, а данное расстояние R — *радиусом* шара. Граница шара называется *сферой* или шаровой поверхностью. Точками сферы являются все точки шара, которые равноудалены от центра шара на расстояние, равное радиусу шара. *Диаметром сферы* называется отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр. Диаметр сферы называется также *диаметром шара*, а центр и радиус шара — *центром* и *радиусом сферы*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными* точками шара.

Шар может быть получен вращением полукруга вокруг диаметра, а сфера — вращением полуокружности вокруг диаметра (рис. 194).

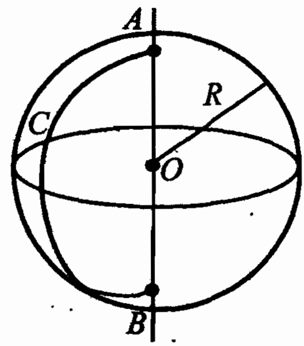


Рис. 194

Сечение шара

Теорема: всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Доказательство:

Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 195).

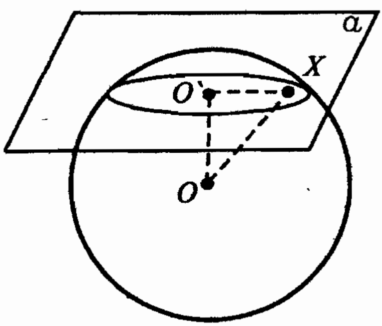


Рис. 195

OO' — перпендикуляр, проведенный из центра шара O на плоскость α. O' — основание этого перпендикуляра.

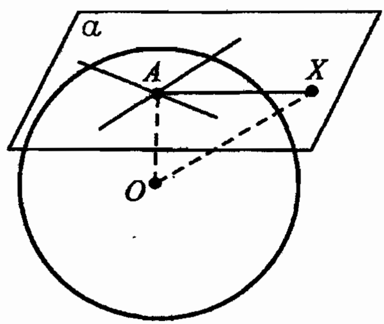
X — произвольная точка шара, которая принадлежит плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Поскольку OX не больше радиуса R шара, то $OX \le \sqrt{\left(R^2 - OO'^2\right)}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем, чем $\sqrt{\left(R^2 - OO'^2\right)}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{\left(R^2 - OO'^2\right)}$.

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. Значит, сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

Диаметральная плоскость — плоскость, которая проходит через центр шара. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом*, а сечение сферы — *большой окружностью.*

Касательной плоскостью к шару называется плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A. Точка A называется *точкой касания* (рис. 196).

Рис. 196



Теорема: касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Доказательство:

Пусть α — плоскость, касательная к шару, A — точка касания (рис. 196). Пусть произвольная точка X, отличная от A, принадлежит плоскости α. Поскольку OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то $OX > OA = R$. Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Пример

Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найти расстояние от центра шара O до плоскости треугольника.

Решение:

Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 197).

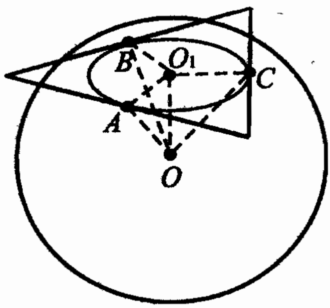


Рис. 197

OO_1 — перпендикуляр, проведенный из центра шара O к плоскости треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам треугольника. O_1A, O_1B, O_1C перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника по теореме о трех перпендикулярах. Рассмотрим прямоугольные треугольники OO_1A, OO_1B, OO_1C: у них общий катет OO_1, гипотенузы OA, OB, OC равны как радиусы. Следовательно, треугольники равны, а из равенства треугольников следует равенство сторон $O_1A = O_1B = O_1C$. Значит, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник.

Радиус окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора

$$OO_1 = \sqrt{\left(OA^2 - O_1A^2\right)} = \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{12}\right)}.$$

Ответ: $\sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{12}\right)}$.

Теорема: линия пересечения двух сфер есть окружность.

Доказательство:

Пусть O_1 и O_2 — центры сфер и A — точка их пересечения (рис. 198).

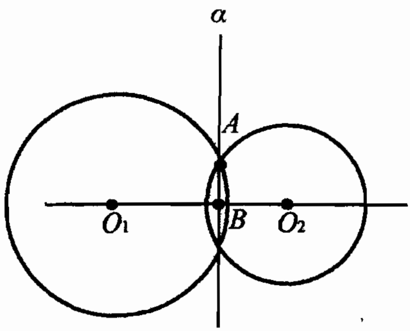


Рис. 198

Плоскость α проведена через точку A перпендикулярно прямой O_1O_2.

B — точка пересечения плоскости α с прямой O_1O_2. По доказанному выше плоскость α пересекает обе сферы по окружности K с центром B, проходящей через точку A. Таким образом, окружность K принадлежит пересечению сфер.

Теперь необходимо доказать, что сферы не имеют других точек пересечения, кроме окружности K. Предположим, что точка X пересечения сфер не лежит на окружности K. Проведем плоскость через точку X и прямую O_1O_2. Она пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, принадлежащих окружности K, и еще в точке X. Но две окружности не могут иметь больше двух точек пересечения. Получили противоречие. Следовательно, пересечение сфер есть окружность (K). Теорема доказана.

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. *Многогранник* называется *описанным около шара*, если все его грани касаются поверхности шара. При этом шар называется *вписанным в многогранник*.

Теорема: центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Доказательство:

Пусть OA — перпендикуляр, проведенный из центра шара O на плоскость основания пирамиды (рис. 199).

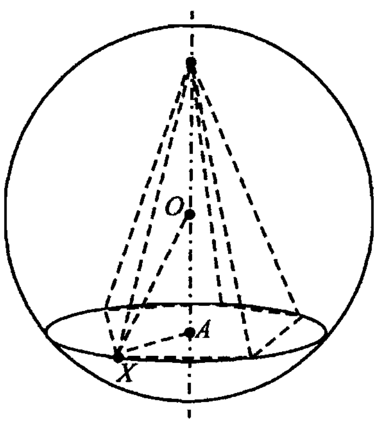


Рис. 199

Пусть X — произвольная вершина основания пирамиды. По теореме Пифагора $AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2$. Следовательно, AX — постоянно для любой вершины основания пирамиды, значит, точка A является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Следовательно, центр шара O лежит на оси пирамиды. Теорема доказана.

Уравнение сферы

Задана прямоугольная система координат $Oxyz$ на плоскости. ***Уравнением поверхности F*** называется уравнение с переменными x, y, z, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности F, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Уравнение поверхности аналогично уравнению линии.

Пусть дана сфера радиуса R с центром $O(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 200).

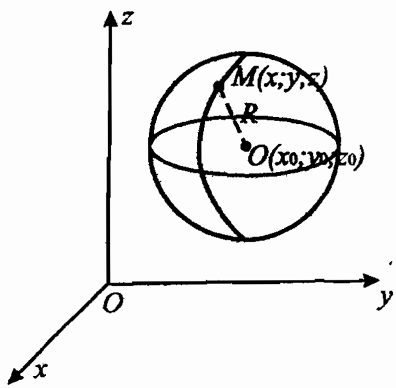


Рис. 200

Расстояние от произвольной точки $M\ (x;\ y;\ z)$ до точки O вычисляется: $MO = \sqrt{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)}$

если точка M принадлежит сфере, то $MO = R$, т. е. $MO^2 = R^2$. Координаты точки M должны удовлетворять уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Если точка M не принадлежит сфере, то ее координаты не удовлетворяют полученному уравнению. Следовательно, уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в прямоугольной системе координат имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Рассмотрим взаимное расположение сферы и плоскости.

Пусть радиус сферы равен R, расстояние от центра сферы O до плоскости α равно d. Расположим систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью α, центр сферы O располагался на положительной полуоси, т. е. точка O в этой системе координат имеет координаты $(0;\ 0;\ z)$. Следовательно, сфера имеет уравнение $x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2$. Поскольку плоскость α совпадет с плоскостью Oxy, то ее уравнение имеет вид $z = 0$.

Чтобы решить задачу о взаимном расположении плоскости и сферы, необходимо исследовать систему уравнений

$$\left\{\begin{matrix} z = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2 \end{matrix}\right\}.$$

Подставим $z = 0$ во второе уравнение: $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$. Возможны три случая.

1. Если $d < R$, то $R^2 - d^2 > 0$ и уравнение $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ является уравнением окружности радиуса $r = \sqrt{(R^2 - d^2)}$ с центром в точке O. Если точка М лежит на этой окружности, то ее координаты $(x;\ y;\ 0)$ удовлетворяют и уравнению сферы и уравнению плоскости, т. е. все точки этой окружности — общие точки сферы и плоскости. Значит, сфера и плоскость пересекаются по окружности, если расстояние от плоскости до центра сферы меньше, чем радиус сферы.

2. Если $d = R$, то $R^2 - d^2 = 0$ и уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют значения $x = 0$ и $y = 0$, т. е. O (0; 0; 0) — единственная общая точка сферы и плоскости. Плоскость является касательной к сфере, если расстояние от плоскости до центра сферы равно радиусу сферы.

3. Если $d > R$, то $R^2 - d^2 < 0$ и уравнению $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ не удовлетворяют координаты ни одной точки. Следовательно, сфера и плоскость не имеют общих точек, если расстояние от плоскости до центра сферы больше радиуса сферы.

Теорема: любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Доказательство

Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 201).

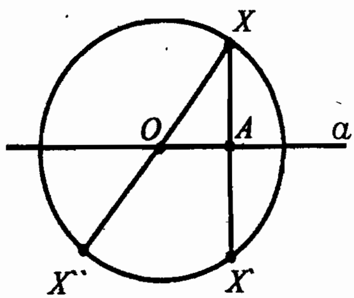


Рис. 201

Построим точку X', которая симметрична точке X относительно плоскости α. Плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и пересекается с ним в его середине (в точке A). Рассмотрим прямоугольные треугольники OAX и OAX': общий катет OA и $AX = AX'$. Следовательно, треугольники равны, а из равенства треугольников следует равенство сторон $OX = OX'$.

Поскольку $OX \le R$, то $OX' \le R$, т. е. точка, которая симметрична точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть X'' — точка, которая симметрична точке X относительно центра шара O. Тогда $OX'' = OX \le R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

Теорема: справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса: $l = 2R\sin\alpha$, $l^2 = 2RH$, где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания. Эти отношения справедливы для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

Доказательство:

Построим осевое сечение конуса, вписанного в шар (рис. 202), получим равнобедренный треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R.

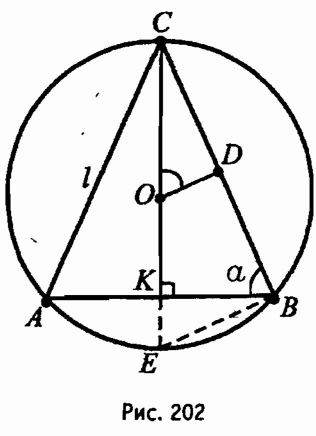


Рис. 202

Центром окружности является точка O пересечения высоты CK и серединного перпендикуляра DO к стороне CB, причем $CK = H$, $\angle COD = \angle CBK = \alpha$. Из треугольника CDO получим, что $CD = CO \sin \alpha$, т. е $l = 2R \sin \alpha$.

Продолжим CK до пересечения с окружностью в точке E и построим отрезок BE. Тогда получим прямоугольный треугольник CBE, в котором катет $CB = l$ есть среднее геометрическое между гипотенузой $CE = 2R$ и проекцией $CK = H$ катета CB на гипотенузу CE, т. е. $l^2 = 2RH$.

Теорема доказана.

Пример

В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α, вписан шар. Радиус окружности касания сферы и конуса равен r. Найти длину образующей конуса.

Решение:

Построим осевое сечение конуса (рис. 203).

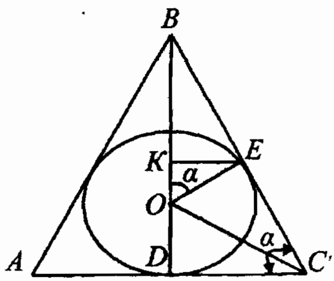


Рис. 203

Получим равнобедренный треугольник ABC и вписанную в него окружность с центром O, где точка O — точка пересечения высоты BD треугольника ABC и биссектрисы CO угла ACB. Точка E — точка касания окружности с образующей конуса BC. Пусть $KE \perp BD$

$KE = r$, $\angle KOE = \alpha$, $OE = OD = \dfrac{r}{\sin\alpha}$. Из ΔODC получим, что $DC = OD \operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} = r\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, рассмотрим ΔBDC:

$$BC = \frac{DC}{\cos\alpha} = 2r\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

Ответ: $2r\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{\sin 2a}$.

Глава 6
ОБЪЕМЫ ТЕЛ

В пространстве для тел вводится понятие объема аналогично понятию площади фигур на плоскости. Тело называется *простым*, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Для простых тел объем — это положительное число, которое обладает следующими свойствами.

1. Равные тела имеют равные объемы.

2. Если тело состоит из нескольких простых тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойства 1 и 2 называются *основными свойствами объемов*. Объем геометрических тел выражается в кубических единицах. *Кубической единицей* называется объем куба, ребро которого равно единице длины. Куб с ребром 1 см называется *кубическим сантиметром* и обозначается $см^3$. Аналогично можно определить кубический метр ($м^3$), кубический дециметр ($дм^3$) и т. д.

Равновеликими называются тела, которые имеют одинаковые объемы.

Принцип Кавальери: если при пересечении двух тел любой плоскостью, параллельной некоторой заданной плоскости, получаются сечения равной площади, то объемы этих тел равны.

Теорема: объем куба с ребром $\frac{1}{n}$ равен $\frac{1}{n^3}$.

Доказательство:

Рассмотрим куб, который принят за единицу измерения объемов. Ребро такого куба равно единице измерения отрезков. Разобьем ребро куба на n равных частей, проведем через каждую точку разбиения перпендикулярные плоскости к этому ребру. Куб будет состоять из n^3 равных малых кубов с ребром $\frac{1}{n}$. Объем всего куба по свойству 2 равен сумме объемов малых кубов, т. е. сумма объемов малых кубов равна 1. Объемы всех малых кубов равны между собой по свойству 1. Следовательно, объем каждого малого куба равен $\frac{1}{n^3}$. Теорема доказана.

Объем прямоугольного параллелепипеда

Теорема: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство:

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объем — буквой V и докажем, что $V = abc$.

Возможны два случая.

1. Измерения a, b, c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n ($n \geq 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$, $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$. Поскольку объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (по предыдущей теореме),

то объем всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \times$ $\times \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Итак, $V = abc$.

2. Хотя бы одно из измерений a, b, c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b и c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с$(n + 1)$-й. очевидно, что $a_n \le a \le a_n'$ где $a_n' = a_n + \frac{1}{10^n}$, аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножим эти неравенства $a_n b_n c_n \le abc \le a_n' b_n' c_n'$, где, $b_n' = b_n + \frac{1}{10^n}$, $c_n' = c_n + \frac{1}{10^n}$. По доказанному в первом случае левая часть неравенства представляет собой объем V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть объем V_n' прямоугольного параллелепипеда P с измерениями a_n', b_n', c_n'. Поскольку параллелепипед P_n' содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P_n', то объем V параллелепипеда P лежит между $V_n = a_n b_n c_n$ и $V_n' = a_n' b_n' c_n'$, т. е. $a_n b_n c_n \le V \le a_n' b_n' c_n'$.

Возьмем число n очень большим, тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет очень малым, поэтому число $a_n' b_n' c_n'$ будет очень мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$. Следовательно, число V очень мало отличается от числа abc. Значит, их можно приравнять: $V = abc$. Теорема доказана.

Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство:

Пусть основанием является грань с ребрами a и b. Тогда площадь основания S равна ab, а высота h параллелепипеда равна c. Следовательно, $V = abc = Sh$. Следствие доказано.

Следствие 2. **Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.**

Доказательство:

Необходимо дополнить прямую треугольную призму с основанием ABC (где $\angle A$ прямой) до прямоугольного параллелепипеда. По следствию 1 объем прямоугольного параллелепипеда $2S_{ABC} \cdot h$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC, h — высота призмы. Получили две равные призмы, одна из которых данная (призмы равны, т. к. они имеют равные основания и равные высоты). Следовательно, объем V данной призмы равен половине объема параллелепипеда, т. е. $S_{ABC} \cdot h$. Следствие доказано.

Пример

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 81, площадь основания 27. Одна сторона основания в 3 раза больше другой. Найдите радиус сферы, описанной около параллелепипеда.

Решение:

Объем параллелепипеда равен $V = abc$, площадь основания $S = ab$. Составим систему трех уравнений для определения сторон параллелепипеда:

$$\begin{cases} abc = 81 \\ ab = 27 \\ a = 3b \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $a = 9$, $b = 3$, $c = 3$.

Если сфера описана около параллелепипеда, то диагональ параллелепипеда является диаметром сферы и круга, описанного около диагонального сечения. По теореме Пифагора находим $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{11}$.

Ответ: $3\sqrt{11}$.

Объем призмы

Теорема: объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма.

Доказать:

$V = S_{осн} \times H$.

Доказательство:

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед точка O — центр симметрии параллелепипеда	данную треугольную призму достроим до параллелепипеда
2. Призма $ABCA_1B_1C_1 \to$ Призму $SOBCDB_1C_1D_1$	исходная призма симметрична относительно точки O достроенной согласно теоремы: диагонали параллелепипеда ересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам
3. Объем параллелепипеда $AD_1 = 2\,ABCA'B'C'$	т. к. симметрия — перемещение, сохраняющее расстояние.

Вывод: V призмы $= S_{осн} \times H$, т. к. V параллелепипеда $= S_{осн} \times H$, где $S_{осн} = 2\,S_{\Delta ABC}$, а H призмы совпадает с H параллелепипеда.

Перейдем к произвольной n-угольной призме. Разобьем ее на n треугольных призм, для чего основание разобьем на треугольники, через вершины которых проведем прямые, параллельные боковым ребрам.

V исходный призмы $= S_1 \times H + S_2H + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H$, где $S_1 S_2 \ldots S_n$ — площади треугольников,	все треугольные призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы

на которые разбито основание призмы, H — высота

Итак, объем любой призмы $V = S_{осн} \times H$.

Теорема: любая призма и прямоугольный параллелепипед равновелики, если равновелики их основания и равны их высоты.

Доказательство:

Пусть дана треугольная призма $KMNK_1M_1N_1$ (рис. 204*а*); α и β — плоскости ее основания, $h = M_1M_0$ — высота призмы.

На плоскости α построим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро AA_1 которого равно h и площадь $ABCD$ равна площади $KMN = S$. В сечении получим треугольник $K'M'N'$ и прямоугольник $A'B'C'D'$, т. к. площадь $K'M'N'$ рана площади KMN и площадь $A'B'C'D'$ равна площади $ABCD$. По принципу Кавальери объем призмы будет равен объему параллелепипеда. Теорема доказана.

Пример

Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

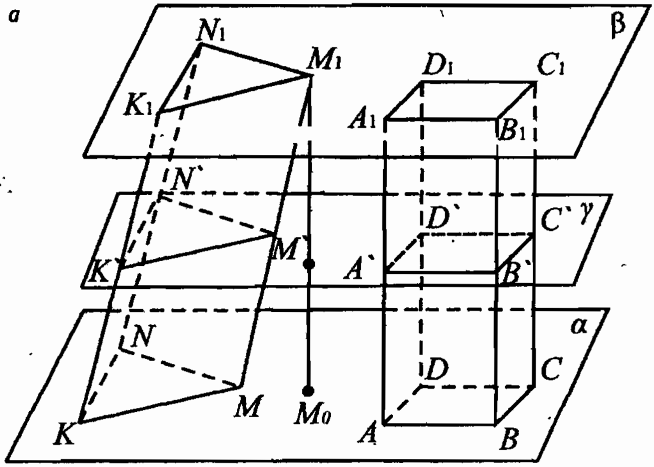
Решение:

Пусть A_1K — перпендикуляр к плоскости ABC (рис. 204*б*);

тогда объем призмы V равен $S_{ABC} \cdot A_1K$, где $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Поскольку $\angle A_1AK = 60°$, то $A_1K = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

а



б

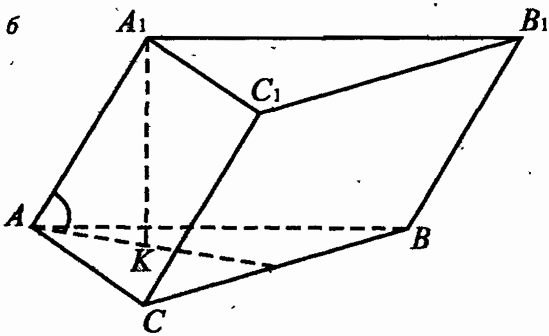


Рис: 204

Итак, $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.

Ответ: $\frac{3a^3}{8}$.

Представление объема интегралом

Теорема: пусть простое тело T лежит между параллельными опорными плоскостями α и β и $\gamma(x)$ — плоскость, лежащая между ними и удаленная на расстояние x от α (рис. 205). Пусть сечения $Q(x)$ тела T плоскостями $\gamma(x)$ — это замкнутые области, причем $Q(x)$, а также их площади $S(x)$ непрерывно зависят от x. Тогда объем $V(T)$ тела T выражается формулой $V(T) = \int_0^h S(x)dx$, где h — расстояние между α и β.

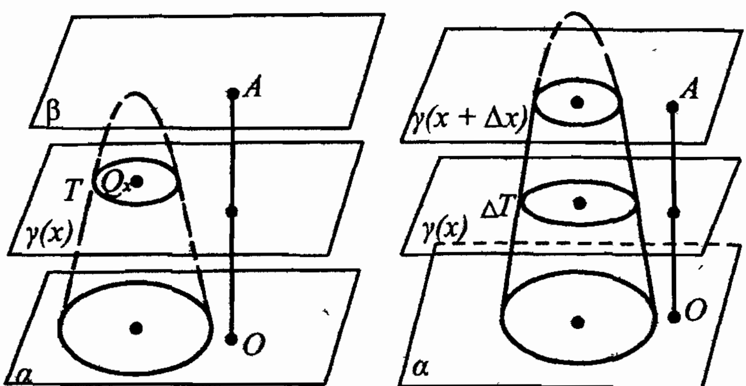


Рис. 205

Доказательство:

Понятие непрерывной зависимости сечения $Q(x)$ тела T можно определить так: если значения x_1 и x_2 достаточно близки, то для любой точки каждого из двух сечений $Q(x_1)$ и $Q(x_2)$ в другом из них найдется достаточно близкая к ней точка.

Пусть $V(x)$ — объем тела $T(x)$, которое составляет часть тела T, лежащая между плоскостями α и $\gamma(x)$. Смещая плоскость $\gamma(x)$ на Δx, получим тело $T(x + \Delta x)$. Это тело отличается от $T(x)$ на слой ΔT между плоскостями $\gamma(x)$ и $\gamma(x + \Delta x)$ (рис. 205). Объем слоя $V(\Delta T)$ равен абсолютной величине приращений ΔT объема $V(x)$: $V(\Delta T) = |\Delta V| = |V(x + \Delta x) - V(x)|$. Не исключено, что $\Delta x < 0$, тогда и $\Delta V < 0$; поэтому $V(\Delta T) = |\Delta V|$.

Если Δx мало, то сечения тела T в пределах данного слоя мало отличаются от сечения $Q(x)$ при данном x. Следовательно, слой мало отличается от прямого цилиндра с основанием $Q(x)$ и той же толщины, т. е. высоты $|\Delta x|$. Поэтому объем слоя будет $V(\Delta T) = (S(x) + s)\cdot|\Delta x|$, где s — малая величина, поскольку любое сечение слоя ΔT мало отличается от сечения $Q(x)$ с площадью $S(x)$. И, когда Δx стремится к нулю, поправка s тоже стремится к нулю. Поскольку $V(\Delta T) = |\Delta V|$. А Δx и ΔV одного знака, то из равенства $V(\Delta T) = (S(x) + s)\cdot|\Delta x|$ следует, что $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = S(x) + s$. Отсюда при Δx, стремящемся к нулю, получим: $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = S(x)$, т. е. $V'(x) = S(x)$. Следовательно, объем $V(x)$ есть первообразная функция $S(x)$. При этом $V(0) = 0$, $V(h)$ есть объем $V(T)$ всего тела T. Поэтому $V(T) = V(h) - V(0) = \int_0^h S(x)dx$. Теорема доказана.

$V = \int_0^h S(x)dx$ — основная формула для вычисления объемов тел.

Объем пирамиды

Теорема: две пирамиды равновелики, если равновелики их основания и равны их высоты.

Доказательство:

Пусть дана четырехугольная пирамида $SABCD$ и треугольная пирамида S_1KMN (рис. 206).

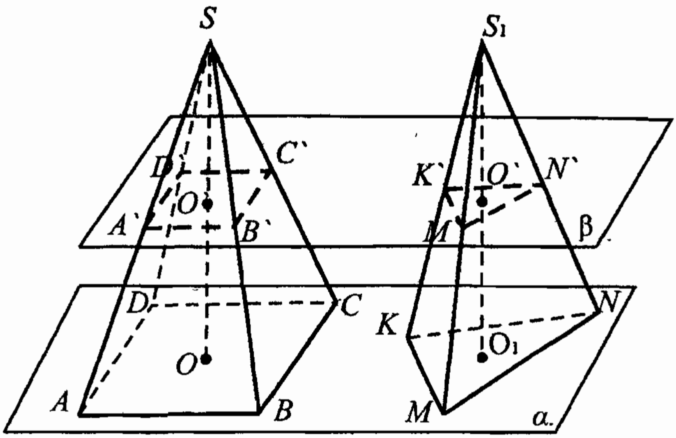


Рис. 206

Их высоты равны $SO = S_1O_1 = H$ и площади оснований также равны. Площадь $ABCD$ равна площади KMN. Основания пирамид расположены на плоскости α.

Пересечем пирамиды плоскостью $\beta \parallel \alpha$ на расстоянии от вершин пирамид $SO = S_1O' = h$. Обозначим S_1 — площадь сечения пирамиды $SABCD$. S_2 — площадь сечения пирамиды S_1KMN. Поскольку $\frac{S_1}{S_{ABCD}} = \frac{h^2}{H^2}$ и $\frac{S_2}{S_{KMN}} = \frac{h^2}{H^2}$, то $\frac{S_1}{S_{ABCD}} = \frac{S_2}{S_{KMN}}$. По условию $S_{ABCD} = S_{KMN}$. Следовательно, $S_1 = S_2$. По принципу Кавальери объемы этих пирамид равны. Теорема доказана.

Теорема: объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство:

Сначала рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объемом V, площадью основания S и высотой h. Проведем ось Ox, OM — высота пирамиды (рис. 207).

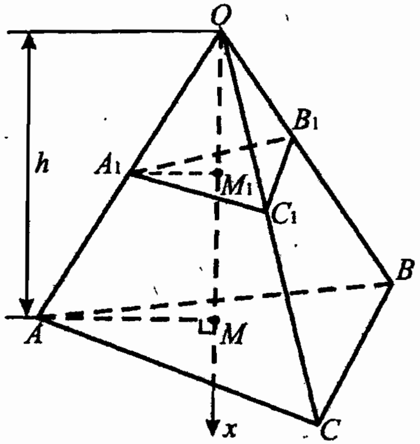


Рис. 207

Рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и параллельной плоскости основания. Обозначим через x абсциссу точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, то $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OAB$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Аналогично доказываются равенства $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$, $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$. Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

Применим основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$. Получим:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Теперь рассмотрим произвольную пирамиду с высотой h и площадью основания S. Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой h. Выразим объем каждой треугольной пирамиды по доказанной формуле и сложим эти объемы. Вынесем за скобки общий множитель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т. е. площадь S основания исходной пирамиды. Таким образом, объем исходной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана.

Следствие.

Объем V усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$.

Доказательство:

Объем усеченной пирамиды равен разности объемов обычной пирамиды и отсеченной. Пусть x — высота полной пирамиды, а S — площадь ее основания. Высота второй пирамиды равна $x - h$, и площадь ее основания равна S_1.

Из подобия пирамид находим x: $\frac{S}{S_1} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$. Значит, объем усеченной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}\left[S\frac{h\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}} - S_1\left(\frac{h\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}} - h\right)\right] = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1).$$

Что и требовалось доказать.

Пример

Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

Решение:

Дано, что $BS \perp SA$ и $BS \perp SC$ (рис. 208), т. е. BS — перпендикуляр к грани SAC и $SD = d$.

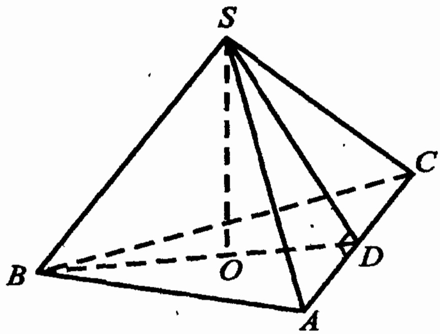


Рис. 208

Следовательно, искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{ACS} \cdot BS$. Рассмотрим треугольник SAD: он прямоугольный, т. к. $\angle SDA = 90°$, но $\angle ASD = 45°$, следовательно, ΔSAD — равнобедренный, т. е. $AD = SD = d$ и $S_{ACS} = d^2$.

ΔBSD является прямоугольным. $BD = 2d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = d\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора:

$BS = \sqrt{BD^2 - SD^2} = \sqrt{3d^2 - d^2} = d\sqrt{2}$.

Следовательно, $V = \frac{1}{3} d^2 \cdot d\sqrt{2} = \frac{1}{3} d^3 \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{1}{3} d^3 \sqrt{2}$.

Объем конуса

Теорема: объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство:

Рассмотрим конус с объемом V, радиусом основания R и высотой h и вершиной в точке O. Введем ось Ox так, как показано на рисунке 209.

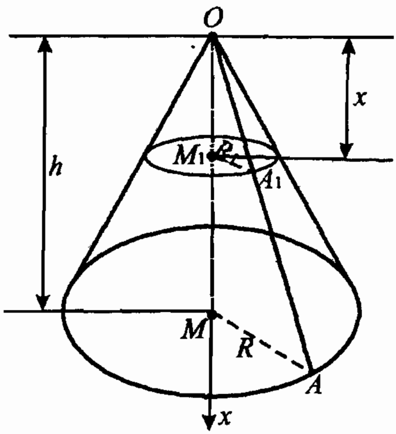


Рис. 209

OM — ось конуса. Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox. Пусть радиус этого круга равен R_1, а площадь сечения равна $S(x)$, где x — абсцисса точки M_1. Прямоугольные треугольники OM_1A_1 и OMA подобны, следовательно, $\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}$. Поскольку $OM_1 = x$, $OM = h$, то $R_1 = \frac{R}{h}x$. Поскольку $S(x) = \pi R_1^2$, то $S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2$.

Применяя основную формулу для вычисления объемов при $a = 0$, $b = h$, получим:

$V = \int\limits_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Площадь S основания конуса

равна πR^2, поэтому $V = \frac{1}{3} Sh$. Теорема доказана.

Следствие.

V объем усеченного конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$.

Пример

Треугольник, ограниченный прямыми $y = 2x$, $y = 3 - x$ и осью Oy, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

Решение:

Построим прямые OB: $y = 2x$ и AB: $y = 3 - x$ (рис. 210).

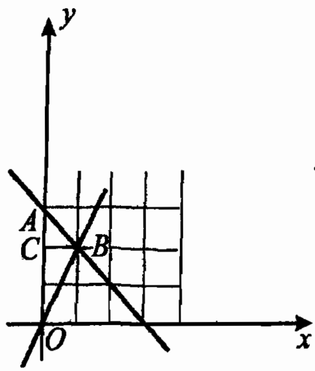


Рис. 210

AB и OB вместе с осью Oy ограничивают треугольник OAB.

В результате вращения ΔOAB вокруг оси Oy получается тело, состоящее из двух конусов, которые имеют общее основание с радиусом $BC = 1$.

Высоты этих конусов равны $AC = 1$ и $OC = 2$. Следовательно, объем тела вращения равен сумме объемов конусов.

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi BC^2 \times AC + \frac{1}{3}\pi BC^2 \times OC = \frac{1}{3}\pi BC^2 \times OA =$$
$$= \pi 1^2 \times 3 = \pi.$$

Ответ: π.

Пример

Разность между образующей и высотой конуса равна d, а угол между ними равен α. Найти объем конуса.

Решение

Пусть ABC — осевое сечение конуса; CO — высота конуса, CA и CB — его образующие (рис. 211).

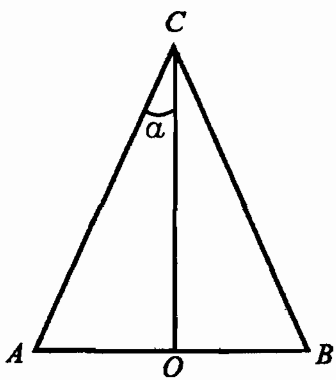


Рис. 211

Дано, что $CA - CO = d$, $\angle ACO = \alpha$. Пусть $OA = R$.

Из ΔCOA получим, что $CO = R \operatorname{ctg} \alpha$, $CA = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

$$CA - CO = \frac{R}{\sin\alpha} - R\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}R(1-\cos\alpha) = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = d,$$

отсюда следует, что $R = d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times CO = \frac{1}{3}\pi R^3 \times \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\pi d^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi d^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

Объем цилиндра

Теорема: объем цилиндра равен произведению площади оснований на высоту.

Доказательство:

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму F_n, а в эту призму впишем цилиндр P_n (рис. 212).

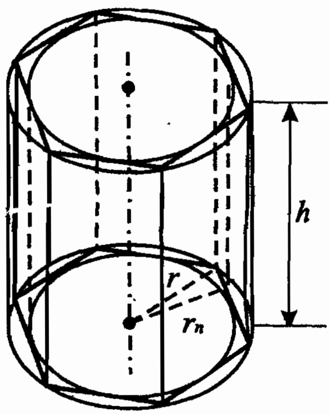


Рис. 212

Пусть V и V_n — объемы цилиндров P и P_n, r_n — радиус цилиндра P_n. Поскольку объем призмы F_n, равен $S_n \times h$, где S_n — площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n, в которой содержится цилиндр P_n, то $V_n < S_n \times h < V$.

Если неограниченно увеличивать число n, то радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P. Поэтому объем цилиндра P_n стремится к объему цилиндра P: $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$. Из неравенства $V_n < S_n \times h < V$ следует, что $S_n \times h = V$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом, $V = \pi r^2 h$. Площадь πr^2 основания цилиндра можно обозначить S, т. е. $V = S \times h$. Теорема доказана.

Пример

Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом, равным α, который обращен к основанию. Объем цилиндра равен V. Найти высоту цилиндра.

Решение:

Пусть AA_1B_1B — осевое сечение цилиндра (рис. 213) и $\angle AOB = \alpha$. Пусть $AA_1 = H$.

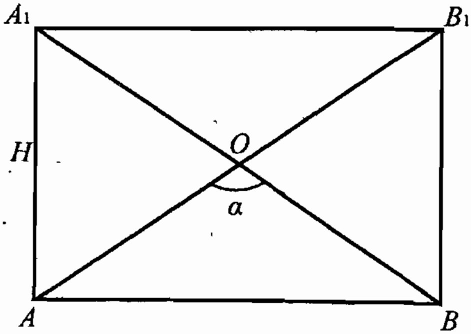


Рис. 213

Поскольку $\angle OAB = \angle OBA = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, то из ΔA_1AB получим, что $AB = H \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = H \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Следовательно, $V = \pi\left(\frac{H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 \times H = \frac{\pi H^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}$.

$$H = \sqrt[3]{\frac{4V\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{4V\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.

Объем шара

Теорема: объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство:

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox (рис. 214).

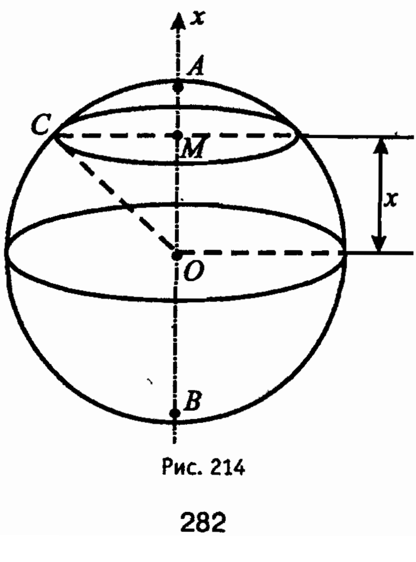


Рис. 214

Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Пусть радиус круга равен r, а площадь обозначим $S(x)$, где x — абсцисса точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC получим $r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Поскольку $S(x) = \pi r^2$, то $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \le x \le R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов при $a = -R$, $b = R$, получим:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$ Теорема доказана.

Шаровым сегментом называется часть шара, которая отсекается от него плоскостью (рис. 215).

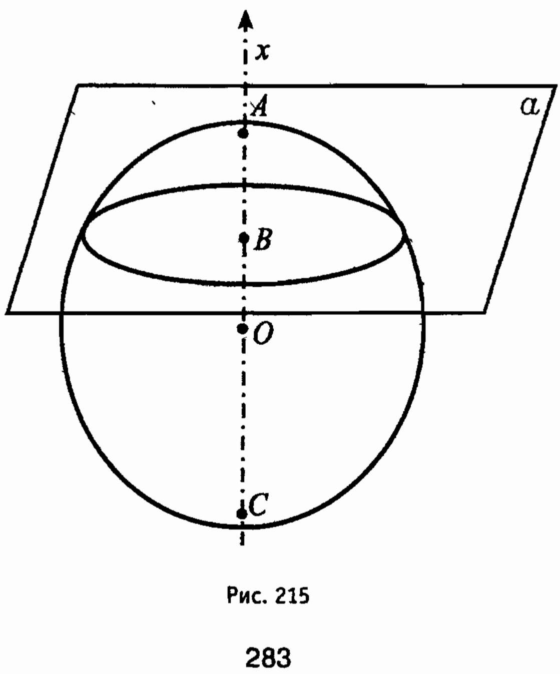


Рис. 215

Секущая плоскость α, проходит через точку B и разделяет шар на два сегмента. *Основанием сегмента* называется круг, получившийся в сечении. *Высотами сегментов* называются длины AB и BC диаметра AC, который перпендикулярен к секущей плоскости.

Теорема: объем V шарового сегмента вычисляется по формуле $V = ph^2(R - \frac{1}{3}h)$.

Доказательство:

Необходимо провести ось Ox перпендикулярно к плоскости α. Следовательно, площадь $S(x)$ сечения шарового сегмента выражается с помощью формулы $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ при $R - h \le x \le R$. Применим основную формулу для вычисления объемов при $a = R - h$, $b = R$.

$V = \pi \int\limits_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h)$. Теорема доказана.

Пример

Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении соответствует центральному углу, равному α.

Решение:

Пусть AnB — шаровой сегмент, O — центр шара, дуга AnB равна $\angle AOB$, который равен α.

Пусть R — радиус шара, OC — перпендикуляр к основанию сегмента, O_1 — центр основания сегмента, $O_1C = H$, тогда $H = R - OO_1$. Из ΔOO_1A находим $OO_1 = R\cos\frac{\alpha}{2}$, следовательно, $H = R - R\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

Объем шарового сегмента равен $V_1 = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) =$

$$= \pi \cdot 4R^2\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(R - \frac{2R}{3}\sin^2\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2 + \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Следовательно, $\frac{V_1}{V} = \sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Шаровым слоем называется часть шара, которая заключена между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 216).

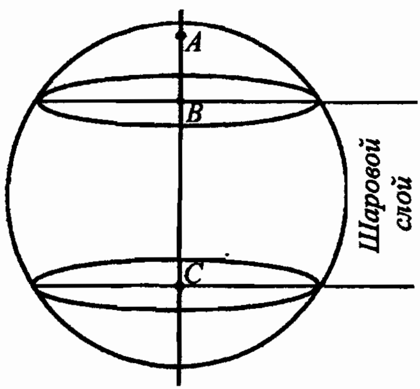


Рис. 216

Основаниями шарового слоя называются круги, которые получены в сечении шара параллельными плоскостями.

Высота шарового слоя — это расстояние между плоскостями.

Объем шарового слоя вычисляется как разность объемов двух шаровых сегментов.

Шаровой сектор — тело, которое получено при вращении кругового сектора с углом, менее 90°, вокруг прямой, которая содержит один из радиусов, ограничивающих круговой сектор (рис. 217).

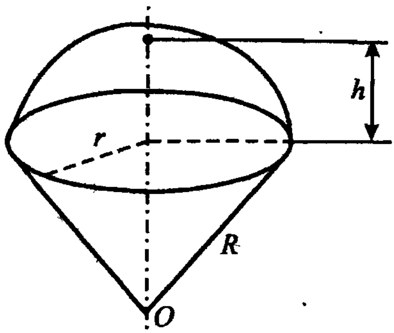


Рис. 217

Шаровой сегмент получается из конуса и шарового сегмента.

Объем шарового сектора вычисляется сложением или вычитанием объемов соответствующих сегмента и конуса. Для объема V шарового сектора можно получить следующую формулу: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где R — радиус шара, h — высота шарового сегмента.

Обьемы подобных тел

Пусть даны T и T_1 — простые подобные тела. Значит, существует преобразование подобия, при котором тело T перейдет в тело T_1 с коэффициентом подобия x.

Тело T можно разбить на треугольные пирамиды A_1, A_2, ..., A_n. При данном преобразовании подобия пирамиды

$A_1, A_2, ..., A_n$ переходят в пирамиды $B_1, B_2, ..., B_n$, которые составляют тело T_1. Следовательно, объем тела T_1 равен сумме объемов пирамид $B_1, B_2, ..., B_n$.

Поскольку пирамида A_1 подобна пирамиде B_1, ..., пирамида A_n подобна пирамиде B_n, то отношение высот этих пирамид равно x, а отношение площадей их оснований равно x^2. Отношение объемов пирамид равно x^3, следовательно, отношение объемов тел T и T_1 равно x^3.

Коэффициент подобия x — это отношение расстояний между любыми двумя парами точек при преобразовании подобия. Значит, x равно отношению двух любых соответствующих линейных размеров тел T и T_1.

Объемы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Глава 7
ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ

Призма

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех граней призмы.

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней.

Сформулируем и докажем теорему.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.

Дано:

AD_1 — прямая призма.

Доказать:

$S_{бок} = pl$, где p — периметр основания, l — длина бокового ребра.

Доказательство:

1. Грань ABA_1B_1 = = грани DCD_1C_1	т. к. грань DCD_1C_1 получается из грани ABA_1B_1 в результате параллельного переноса на AD
2. Грань AA_1DD_1 = = грани BB_1CC_1	аналогично
3. Все боковые грани прямой призмы прямоугольники	по определению прямой призмы

4. $S_{бок} = 2(AB + AD) \times H$ т. к. основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы
$H = l$, т. е. высота равна длине бокового ребра

Вывод: $S_{бок} = pl$, т. к. $p = 2(AB + AD)$.

Площадь полной поверхности призмы $S_{полн}$ можно выразить через площадь боковой поверхности $S_{бок}$ и площадь основания $S_{осн}$: $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

Пример

В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найти боковую поверхность, если периметр сечения равен a, а боковые ребра равны m.

Решение:

Плоскость данного сечения разбивает призму на две части (рис. 218).

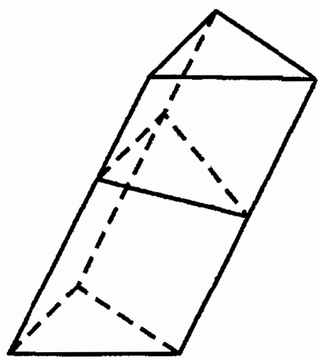


Рис. 218

Применим к одной из них параллельный перенос, который совмещает основания призмы. При этом преобразовании получится прямая призма, основанием которой является сечение исходной призмы, а боковые ребра равны m. боковая поверхность полученной призмы равна боковой поверхности исходной призмы. Следовательно, боковая поверхность исходной призмы равна am.

Ответ: am.

Пирамида

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех граней пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей боковых граней пирамиды.

Справедлива формула:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Сформулируем и докажем теорему о боковой поверхности правильной пирамиды. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

Дано:

Правильная n-угольная пирамида, сторона основания a, l — апофема.

Доказать:

$S_{бок} = pl/2$,

где P — полупериметр.

Доказательство:

1. $S_{бок\ грани} = \frac{1}{2} AB \times SK,\quad S\Delta = \frac{1}{2}ah$

где $AB = a$, $SK = l$

2. $S_{бок} = \frac{1}{2}aln$ т. к. боковых граней у n-угольной пирамиды, n граней

3. $S_{бок} = \frac{1}{2} pl$, т. к. $an = p$

Теорема доказана.

Пример

Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна $S_{осн}$.

Решение

Пусть a является стороной основания. Поскольку основанием пирамиды является правильный треугольник, то $S_{осн} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, выразим a: $a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

Площадь боковой поверхности равна $S_{бок} = \frac{1}{2} a \cdot 3 \cdot ED$ (рис. 219).

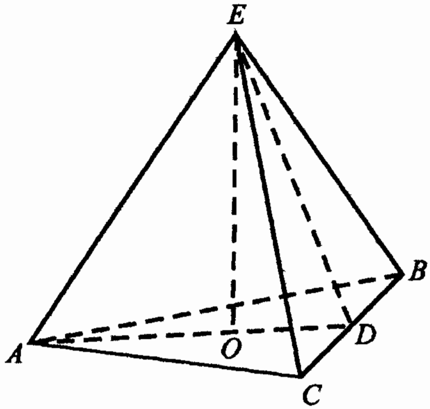


Рис. 219

Но $ED = DC = \frac{1}{2} a$.

получится прямая призма, основанием которой является сечение исходной призмы, а боковые ребра равны m. боковая поверхность полученной призмы равна боковой поверхности исходной призмы. Следовательно, боковая поверхность исходной призмы равна am.

Ответ: am.

Пирамида

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех граней пирамиды.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей боковых граней пирамиды.

Справедлива формула:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Сформулируем и докажем теорему о боковой поверхности правильной пирамиды. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

Дано:

Правильная n-угольная пирамида, сторона основания a, l — апофема.

Доказать:

$S_{бок} = pl/2$,

где P — полупериметр.

Доказательство:

1. $S_{бок\ грани} = \frac{1}{2} AB \times SK, \quad S\Delta = \frac{1}{2} ah$

где $AB = a$, $SK = l$

2. $S_{бок} = \frac{1}{2} aln$ т. к. боковых граней у n-угольной пирамиды, n граней

3. $S_{бок} = \frac{1}{2}pl,$ т. к. $an = p$

Теорема доказана.

Пример

Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна $S_{осн}$.

Решение

Пусть a является стороной основания. Поскольку основанием пирамиды является правильный треугольник,

то $S_{осн} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, выразим a: $a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

Площадь боковой поверхности равна $S_{бок} = \frac{1}{2}a \cdot 3 \cdot ED$ (рис. 219).

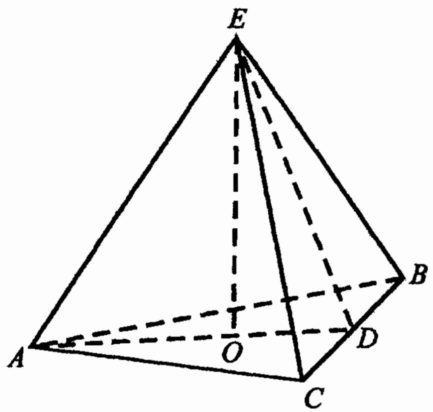


Рис. 219

Но $ED = DC = \frac{1}{2}a$.

Следовательно, $S_{бок} = \frac{3a^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = S\sqrt{3}$.

Ответ: $S\sqrt{3}$.

Пример

Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение:

По условию $\angle SKO = 60°$ (рис. 220), то $OK = \frac{1}{2}SK = \frac{1}{2}h$. Основанием пирамиды является правильный шестиугольник, следовательно, $\angle KOD = 30°$ и $KD = \frac{1}{2}OD$.

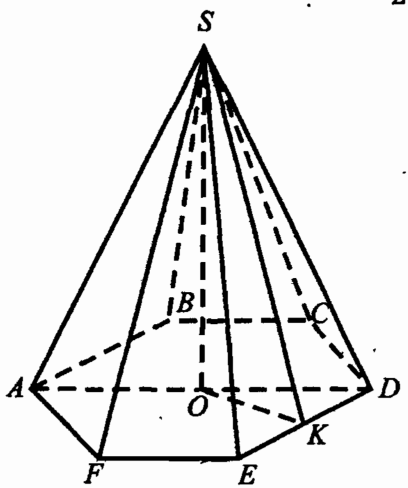


Рис. 220

По теореме Пифагора $OK^2 = OD^2 - KD^2 = 4KD^2 - KD^2 = 3KD^2$, т. е. $KD = \frac{h\sqrt{3}}{6}$, $DE = 2KD = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, $S_{осн} = \frac{1}{4} \cdot 6DE^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}h^2$, $S_{бок} = \frac{1}{2}3DE \times$ $\times h = h^2\sqrt{3}$.

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 3h^2\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}3h^2\sqrt{3}$.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей боковых граней пирамиды.

Теорема: площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Доказательство:

Боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями с одним и тем же верхним основанием a, нижним основанием b и высотой (апофемой) l. Площадь одной грани равна $\frac{1}{2}(a + b)l$. Боковая поверхность, т. е. сумма площадей всех граней, равна $\frac{1}{2}(an + bn)l$, где n — число вершин угол основания пирамиды, an и bn — периметры оснований пирамид. Теорема доказана.

Цилиндр

Рассмотрим цилиндр (рис. 185). Разрежем его боковую поверхность по образующей AA_1 и развернем так, чтобы все образующие лежали в одной плоскости α (рис. 221).

Получим в плоскости α прямоугольник $AA_1A_1'A'$. Стороны AA_1 и $A_1'A'$ прямоугольника являются краями разреза боковой поверхности по образующей AA_1 цилиндра. Полученный прямоугольник называется *разверткой боковой поверхности цилиндра*. AA' — развертка окружнос-

Рис. 221

ти основания цилиндра, AA_1 — высота цилиндра. Следовательно, $AA' = 2\pi r$, $AA_1 = h$.

Площадью боковой поверхности цилиндра является площадь развертки боковой поверхности.

Площадь прямоугольника $AA_1A_1'A'$ равна $AA_1 \times AA' = 2\pi rh$, следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = 2\pi rh$, где h — высота цилиндра, r — радиус цилиндра.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей двух его оснований и боковой поверхности. Площадь основания равна πr^2. Следовательно, $S_{цил} = 2\pi r(h + r)$.

Пример

Две вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина лежит на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

Решение:

Дан цилиндр, $AC = AB = BC = a$, причем AB принадлежит верхнему основанию цилиндра, C — окружности нижнего основания цилиндра. Плоскость ABC составляет с CD угол α (рис. 222).

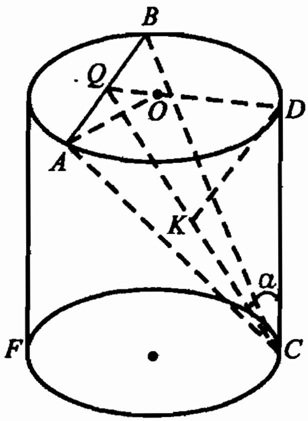


Рис. 222

Пусть $CQ \perp AB$; тогда по теореме о трех перпендикулярах $DC \perp AB$. Следовательно, плоскость ABC перпендикулярна плоскости CDQ, т. к. $AB \perp CDQ$. Проведем $DK \perp CDQ$; DK лежит в плоскости CDQ и точка K лежит на CQ, т. е. $\angle DCK = \alpha$. В треугольнике CDQ имеем $DC = CQ \cos \alpha$, $QD = CQ \sin \alpha$, следовательно, $DC = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cos \alpha$; $QD = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \sin \alpha$. Пусть R — радиус основания цилиндра, т. е. $OD = OA = OB = R$. Рассмотрим треугольник AOQ: $OQ = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, т. е. $R = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = QD = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \sin \alpha$. Решив полученное уравнение, найдем $R = \dfrac{a\left(3\sin^2 \alpha + 1\right)}{4\sqrt{3} \sin \alpha}$.

$$S_{бок} = 2\pi \frac{a\left(3\sin^2\alpha + 1\right)}{4\sqrt{3}\sin\alpha} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha + 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha + 1)\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$

Конус

Рассмотрим конус. Его боковую поверхность также можно разрезать по одной из образующих.

Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, причем длина дуги сектора равна длине окружности основания, а радиус сектора равен образующей конуса (рис. *223*).

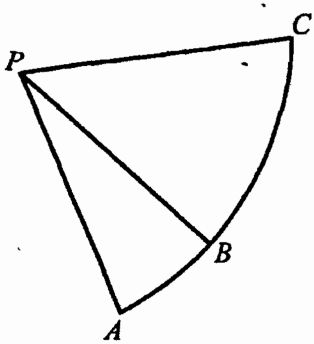


Рис. 223

Площадью боковой поверхности конуса является площадь развертки боковой поверхности.

Площадь кругового сектора равна $\frac{1}{360}\pi l^2\alpha$, где α — градусная мера дуги сектора. Следовательно, $S_{бок} = \frac{1}{360}\pi l^2\alpha$.

Поскольку длина дуги AC равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$, то $2\pi r = \frac{1}{180}\pi l\alpha$, следовательно, $\alpha = \frac{360r}{l}$. Подставим полученное выражение в формулу площади боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \pi rl$.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению образующей на половину длины окружности.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей основания и боковой поверхности. Площадь полной поверхности $S_{кон}$ вычисляется по формуле: $S_{кон} = \pi r(l + r)$.

Найдем площадь $S_{бок}$ боковой поверхности усеченного конуса.

Пусть P — вершина конуса, из которого получен усеченный конус, AA_1 — образующая усеченного конуса, O и O_1 — центры оснований (рис. 224).

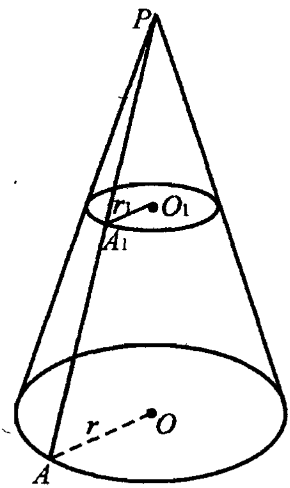


Рис. 224

$S_{бок} = \pi rl = \pi r \times PA - \pi r_1 \times PA_1 = \pi r(PA_1 + AA_1) - \pi r_1 \times PA_1$.

Поскольку $AA_1 = l$, то $S_{бок} = \pi rl + \pi(r - r_1)PA_1$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники PO_1A_1 и POA: они подобны, т. к. имеют общий острый угол P. Справедливо следующее соотношение: $\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$. Выразим PA_1, подставим в формулу площади боковой поверхности и получим, что $S_{бок} = \pi(r + r_1)l$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению образующей на полусумму длин окружностей оснований.

Пример

Шар радиуса r вписан в усеченный конус с образующей, равной l. Найти объем и боковую поверхность усеченного конуса.

Решение:

Проведем плоскость через высоту конуса. Сечением будет равнобедренная трапеция, описанная около круга радиуса r (рис. 225).

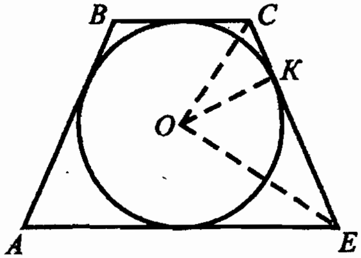


Рис. 225

Пусть r_1 и r_2 — радиусы оснований усеченного конуса, тогда $AE = 2r_2$, $BC = 2r_1$. Поскольку $ABCE$ — описанный четырехугольник, то справедливо $BC + AE = AB + CE$, т. е. $2r_1 + 2r_2 = 2l$, следовательно, $S_{бок} = rl^2$.

Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi H((r_1 + r_2)^2 - r_1r_2)$, где $H = 2r$, $r_1 + r_2 = l$, $r_1r_2 = r^2$, т. к. в прямоугольном треугольнике OCE справедливо равенство $OK^2 = CK \cdot KE$ ($\angle COE = 90°$, т. к. OC и OE — биссектрисы углов трапеции и, следовательно, $\angle OCE + \angle CEO = 90°$).

Следовательно, $V = \frac{2}{3}\pi r(l^2 - r^2)$.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi r(l^2 - r^2)$; rl^2.

Пример

В конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник, вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания конуса. Отношение боковых поверхностей конуса и цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найти угол между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

Решение:

Построим осевое сечение фигуры. Пусть SDC — осевое сечение конуса, SD и SC — образующие конуса, $\angle DCS = 90°$, SO_2 — высота конуса, O_1 и O_2 — центры оснований вписанного в конус цилиндра, $S_{бок.\,кон} : S_{бок.\,цил.} = 4\sqrt{2}$ (рис. 226).

Искомый угол α — это угол между DO_1 и основанием конуса. Пусть $O_2D = R$; тогда $SD = R\sqrt{2}$, $SO_2 = R$, $S_{бок.\,кон} = \pi R^2\sqrt{2}$.

Пусть радиус основания цилиндра равен r, высота O_1O_2 — h; тогда $S_{бок.\,цил} = 2\pi rh$. По условию $\pi R^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot 2\pi rh$,

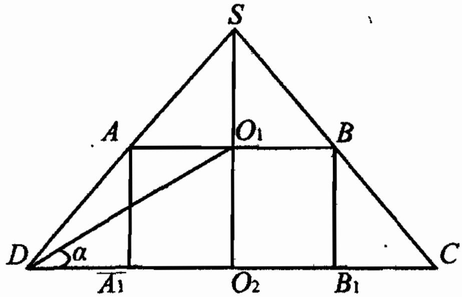


Рис. 226

т. е. $R^2 = 8rh$. Но $SO_2 = h + r = R$, т. е. $r = R - h$. Подставим полученное выражение в равенство $R^2 = 8rh$, т. е. $R^2 = 8Rh - 8h^2$. Разделим обе части полученного уравнения на h^2: $\left(\frac{R}{h}\right)^2 - 8\frac{R}{h} + 8 = 0$. Поскольку $\frac{R}{h} = \operatorname{ctg} O_1DO_2 = \operatorname{ctg}\alpha$, то $\operatorname{ctg}^2\alpha - 8\operatorname{ctg}\alpha + 8 = 0$, следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha = 4 \pm 2\sqrt{2}$, т. е. $\alpha = \operatorname{arcctg}(4 \pm 2\sqrt{2})$.

Ответ: $\operatorname{arcctg}(4 \pm 2\sqrt{2})$.

Площадь сферы

Рассмотрим сферу с радиусом R, центром в точке O и описанный около нее многогранник, у которого n граней. Пронумеруем грани и обозначим S_i площадь i-й грани ($1 \le i \le n$).

Соединяя центр сферы со всеми вершинами многогранника, получаем n пирамид с общей вершиной O, основаниями которых являются грани многогранника, высотами — радиусы сферы, которые проведены в точки касания сферы и граней многогранника. Объем i-й пирамиды равен:

$$\frac{1}{3}S_1R = \frac{1}{3}P_n,$$

где P_n — площадь поверхности многогранника.

Следовательно, $P_n = \dfrac{3V_n}{R}$.

Если неограниченно увеличивать n так, чтобы наибольший размер каждой грани многогранника стремился к нулю. При этом объем V_n описанного многогранника будет стремиться к объему шара, т. е. $V_n \to \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Поскольку $S = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, то $S = 4\pi R^2$.

Пример

Дан шар, вписанный в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a. Найти площадь поверхность шара.

Решение:

$S = 4\pi R^2$.

Необходимо найти радиус R шара. Построим сечение плоскостью через высоту пирамиды и апофему (рис. 227).

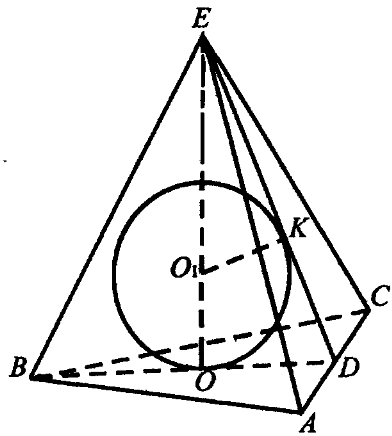


Рис. 227

В полученном сечении радиус круга равен радиусу шара. Поскольку все ребра пирамиды равны a, то $ED = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ и $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Рассмотрим ΔEOD: по теореме Пифагора $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$. $SO_1 = SO - R$. Рассмотрим ΔSKO_1. По теореме Пифагора $O_1K^2 = SO_1{}^2 - SK^2$ т. е. $R^2 = (SO - R)^2 - \frac{1}{3}a^2$, следовательно, $R = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

$S = 4\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi a^2.$

Ответ: $\frac{1}{6}\pi a^2$.

Учебное издание

Линиза Журановна Жалпанова
Ольга Андреевна Калинина
Галина Николаевна Мальянц

ГЕОМЕТРИЯ ЗА 24 ЧАСА

Ответственный редактор	*Н. Казакова*
Редактор	*Е. Василенко*
Технический редактор	*Г. Логвинова*
Корректор	*И. Фетисова*
Верстка:	*С. Демченко*
Дизайн обложки:	*М. Сафиуллина*
Художники:	*О. Калинина*
	Е. Шишкина

Сдано в набор 18.01.2009 г. Подписано в печать 24.02.2009 г.
Формат 84x108 1/32. Бумага писчая.
Гарнитура Школьная.
Тираж 3 000. Заказ № 258.

ООО «ФЕНИКС»
344082, г. Ростов н/Д, пер. Халтуринский, 80
e-mail: kazakova-fenix@mail.ru, kazakova_nv@aaanet.ru
тел. 8(863)2618960, факс 8(863)2618950

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.
Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.

интернет-магазин
OZON.ru
24713951

ISBN 978-5-222-15334-5
9785222153345

ФЕНИКС